УДК 517.968 DOI: 10.34220/2311-8873-2020-3-3-16-19

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ОСОБЕННОСТЬЮ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Сапронов И.В., Спирина Н.М., Зенина В.В.
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»
E-mail: 585386@mail.ru

Аннотация. В нормированном банаховом пространстве рассматривается вырождающееся в нуле интегро-дифференциальное уравнение. Для него строится множество решений со значениями в некотором специально введённом пространстве функций, равных в нуле нулю.

Ключевые слова: интегральное уравнение, банахово пространство, операторный пучок, спектр.

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH FEATURE IN A BANACH SPACE

Sapronov I.V., Spirina N.M., Zenina V.V.
Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Voronezh State Forestry University. G.F. Morozova»
E-mail: 585386@mail.ru

Summary. In normalized Banach space, a zero-degenerating integro-differential equation is considered. For him, many solutions are built with values in some specially introduced space of functions equal to zero in zero.

Keywords: integral equation, Banach space, operator bundle, spectrum.

Введение

В связи с расширяющимся объемом приложений особое развитие получила теория дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Она применяется при решении задач обработки экспериментальных данных, задач численного дифференцирования, различных обратных задач, поэтому решение таких уравнений является актуальным и в настоящее время.

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$C_0 x^q \Pi^3(\vartheta) + C_1 x^q \Pi^2(\vartheta) + C_2 x^q \Pi(\vartheta) + C_3 x^q \vartheta + \int_0^x \vartheta(t)dt = 0, \tag{1}$$

где $\Pi(\vartheta) = \left(x^q \vartheta(x)\right)'$, $\Pi^k = \Pi\left(\Pi^{k-1}(\vartheta)\right) = \left(x^q \Pi^{k-1}(\vartheta)\right)'$.

Оно изучается в пространстве $M_{q,r}^{4,-q}$. Операторы C_0, C_1, …, C_4 являются ограниченными в E.

Рассмотрим операторный пучок

$$F_r = -C_0 r^3 + C_1 r^2 - C_2 r + C_3 - C_4 \frac{1}{r}. \tag{2}$$

Теорема. Дано:

1) пучок (2) имеет собственное значение $r < 0$;

2) собственному значению r принадлежит цепочка элементов банахова пространства E v_i $(i = 0, \dots, 4)$.

Тогда рассматриваемое равенство (1) имеет следующее решение

$$\vartheta(x) = \frac{1}{x^q} e^{rZ} \sum_{i=0}^{4} \overline{\mathrm{v}_{4-\iota}}\, Z^i(x), \quad \text{где} \quad Z(x) = \int_\alpha^x \frac{du}{u^q}. \tag{3}$$

Построение решения

Подставляя (3) в (1) получаем

$$\begin{gathered}
\left(-C_0 r^3 + C_1 r^2 - C_2 r + C_3 - C_4 \frac{1}{r}\right) \bar{\mathrm{v}}_0 Z^4 + \\
+4\left(-3C_0 r^2 + 2C_1 r - C_2 + C_4 \frac{1}{r^2}\right) \bar{\mathrm{v}}_0 Z^3 + \\
+\left(-C_0 r^3 + C_1 r^2 - C_2 r + C_3 - C_4 \frac{1}{r}\right) \bar{\mathrm{v}}_1 Z^3 + \\
+6\left(-6C_0 r + 2C_1 - C_4 \frac{2}{r^3}\right) \bar{\mathrm{v}}_0 Z^2 + \\
+3\left(-3C_0 r^2 + 2rC_1 - C_2 + \frac{1}{r^2} C_4\right) \bar{\mathrm{v}}_1 Z^2 + \\
+\left(-C_0 r^3 + C_1 r^2 - C_2 r + C_3 - \frac{1}{r} C_4\right) \bar{\mathrm{v}}_2 Z^2 + \\
+4\left(-6C_0 + \frac{6}{r^4} C_4\right) \bar{\mathrm{v}}_0 Z + \\
+3\left(-6C_0 r + 2C_1 - \frac{2}{r^3} C_4\right) \bar{\mathrm{v}}_1 Z + \\
+2\left(-3C_0 r^2 + 2rC_1 - C_2 + \frac{1}{r^2} C_4\right) \bar{\mathrm{v}}_2 Z + \\
+\left(-C_0 r^3 + C_1 r^2 - C_2 r - \frac{1}{r} C_4\right) \bar{\mathrm{v}}_3 Z + \\
+\left(\frac{-24}{r^5}\right) C_4 \bar{\mathrm{v}}_0 + \left(-6C_0 + \frac{6}{r^4} C_4\right) \bar{\mathrm{v}}_1 + \left(-6C_0 r + 2C_1 - \frac{2}{r^3} C_4\right) \bar{\mathrm{v}}_2 + \\
+\left(-3C_0 r^2 + 2rC_1 - C_2 + \frac{1}{r^2} C_4\right) \bar{\mathrm{v}}_3 + \\
+\left(-C_0 r^3 + C_1 r^2 - C_2 r + C_3 - \frac{1}{r} C_4\right) \bar{\mathrm{v}}_4 = 0
\end{gathered} \tag{4}$$

Приравнивая коэффициенты при Z^i $(i = 4,3,\dots,0)$ нулю, получаем

$$\begin{gathered}
\left(-C_0r^3 + C_1r^2 - C_2r + C_3 - C_4\frac{1}{r}\right)\bar{\mathrm{v}}_0 = 0 \\
4\left(-3C_0r^2+2C_1r-C_2 + C_4\frac{1}{r^2}\right)\bar{\mathrm{v}}_0 + \\
+\left(-C_0r^3 + C_1r^2 - C_2r + C_3 - C_4\frac{1}{r}\right)\bar{\mathrm{v}}_1 = 0 \\
6\left(-6C_0r + 2C_1 - C_4\frac{2}{r^3}\right)\bar{\mathrm{v}}_0 + \\
+3\left(-3C_0r^2 + 2rC_1 - C_2 + \frac{1}{r^2}C_4\right)\bar{\mathrm{v}}_1 + \\
+\left(-C_0r^3 + C_1r^2 - C_2r + C_3 - \frac{1}{r}C_4\right)\bar{\mathrm{v}}_2 = 0 \\
4\left(-6C_0 + \frac{6}{r^4}C_4\right)\bar{\mathrm{v}}_0 + \\
+3\left(-6C_0r + 2C_1 - \frac{2}{r^3}C_4\right)\bar{\mathrm{v}}_1 + \\
+2\left(-3C_0r^2 + 2rC_1 - C_2 + \frac{1}{r^2}C_4\right)\bar{\mathrm{v}}_2 + \\
+\left(-C_0r^3 + C_1r^2 - C_2r - \frac{1}{r}C_4\right)\bar{\mathrm{v}}_3 = 0 \\
\left(\frac{-24}{r^5}\right)C_4\bar{\mathrm{v}}_0 + \left(-6C_0 + \frac{6}{r^4}C_4\right)\bar{\mathrm{v}}_1 + \left(-6C_0r + 2C_1 - \frac{2}{r^3}C_4\right)\bar{\mathrm{v}}_2 + \\
+\left(-3C_0r^2 + 2rC_1 - C_2 + \frac{1}{r^2}C_4\right)\bar{\mathrm{v}}_3 + \\
+\left(-C_0r^3 + C_1r^2 - C_2r + C_3 - \frac{1}{r}C_4\right)\bar{\mathrm{v}}_4 = 0
\end{gathered} \tag{5}$$

Систему уравнений (5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
&F_r\bar{\mathrm{v}}_0 = 0 \\
&F_r'4\bar{\mathrm{v}}_0 + F_r\bar{\mathrm{v}}_1 = 0 \\
&\frac{F_r''}{2!}12\bar{\mathrm{v}}_0 + F_r'3\bar{\mathrm{v}}_1 + F_r\bar{\mathrm{v}}_2 = 0 \\
&\frac{F_r'''}{3!}24\bar{\mathrm{v}}_0 + \frac{F_r''}{2!}6\bar{\mathrm{v}}_1 + \frac{F_r'}{1!}2\bar{\mathrm{v}}_2 + F_r\bar{\mathrm{v}}_3 = 0 \\
&\frac{F_r^{IV}}{4!}24\bar{\mathrm{v}}_0 + \frac{F_r'''}{3!}6\bar{\mathrm{v}}_1 + \frac{F_r''}{2!}2\bar{\mathrm{v}}_2 + F_r'\bar{\mathrm{v}}_3 + F_r\bar{\mathrm{v}}_4 = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

Из системы уравнений (6) следует, что

$$\bar{\mathrm{v}}_k = \frac{4!}{(4-k)!}\mathrm{v}_k \quad (k = 0,1,2,3,4).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Sato, T. Sur l´equation integrale / T. Sato // J. Math. Soc. Japan. – 1953. – V. 5. – № 2. – P. 145-153.

2 Takesada, T. On the singular point of integral equations of Volterra type / T. Takesada // J. Math. Soc. Japan. – 1955. – V. 7. – № 2. – P. 123-136.

3 Панов, Л. И. Об интегральных уравнениях с ядрами, имеющими неинтегрируемую особенность произвольного порядка / Л. И. Панов // ДАН Тадж. ССР. – 1967. – Т. 10. – № 6. – С. 3-7.

4 Магницкий, Н. А. О существовании многопараметрических семейств решений интегрального уравнения Вольтерра I-го рода / Н. А. Магницкий // ДАН СССР. – 1977. – Т. 235. – № 4. – С. 772-774.

5 Магницкий, Н. А. Многопараметрические семейства решений интегральных уравнений Вольтерра / Н. А. Магницкий // ДАН СССР. – 1978. – Т. 240. – № 2. – С. 268-271.

6 Магницкий, Н. А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода / Н. А. Магницкий // Журнал выч. мат. и мат. физ. – 1979. – Т. 19. – № 4. – С. 970-988.

7 Крейн, С. Г. О полноте системы решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью / С. Г. Крейн, И. В. Сапронов // Докл. РАН. – 1997. – Т. 355. – № 4. – С. 450-452.

8 Крейн, С. Г. Об интегральных уравнениях Вольтерра с особенностями / С. Г. Крейн, И. В. Сапронов // УМН. – 1995. – Т. 50. – Вып. 4. – С. 140.

9 Krein, S. G. Singular integral Volterra equations / S. G. Krein // Abstracts. International Congress of Mathematics. Zurich. 3-11 August 1994. – P. 125.

10 Krein, S. G. One class of solutions of Volterra equation with regular singularity / S. G. Krein, I. V. Sapronov // Укр. мат. ж. – 1997. – Т. 49. – № 3. – С. 424-432.

11 Сапронов, И. В. Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве // Известия высших учебных заведений. Математика. 2011. – № 1. – С. 59-71.

12 Сапронов, И. В. Уравнение Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Известия высших учебных заведений. – Математика. – 2007. – № 11. – С. 45-55.

13 Сапронов, И. В. Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2005. – № 2. – С. 81-83.

14 Сапронов, И. В. Об одном классе решений уравнения Вольтерра II рода с регулярной особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2004. – № 6. – С. 48-58.