УДК 517.98+517.968.7 DOI: 10.34220/2311-8873-2021-4-4-4-10

СВОЙСТВА НЕКОТОРОГО НАГРУЖЕННОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ВЕСОМ

Усков В.И., Пантелеева А.Г.
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»
E-mail: vum1@yandex.ru

Аннотация: В работе рассматривается некоторый интегро-дифференциальный оператор с весом, нагруженный операторным слагаемым. Он действует в пространстве непрерывных функций. Определяются условия, при которых этот оператор ограничен, устанавливается вид его полугруппы. В качестве приложения рассматривается задача Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка. Такие уравнения возникают в теории упругости и моделях биологических процессов: задача Проктора о равновесии упругой балки, задача Вольтерра о крутильных колебаниях, задача Прандтля расчета крыла самолета, в анализе экономических моделей и т.д.

Ключевые слова: интегральный оператор, вес, свойства, задача Коши, интегро-дифференциальное уравнение, первый порядок.

PROPERTIES OF A CERTAIN LOADED INTEGRAL OPERATOR WITH WEIGHT

Uskov V.I., Panteleeva A.G.
Federal State Budget Educational Institution of Higher Education «Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov»
E-mail: vum1@yandex.ru

Summary: In this paper, we consider a certain integral operator with a weight, loaded with operator term. It acts in the space of continuous functions. The conditions under which this operator is limited are determined, the form of its semigroup is established. The Cauchy problem for an integro-differential equation is considered as an application. Such equations arise in the theory of elasticity and models of biological processes: Proctor's problem on the equilibrium of an elastic beam, Volterra's problem on torsional vibrations, Prandtl's problem for calculating an airplane wing, in analysis of economic models, etc.

Keywords: integral operator, properties, weight, Cauchy problem, integro-differential equation, first order.

Введение

Рассматривается интегро-дифференциальный оператор:

$$D = D_1 + D_2, \quad D_1 = \int_0^x a(s)(\cdot)ds, \quad D_2 = b(x)I, \tag{1}$$

где $a(x), b(x)$ – заданные функции; $(x,t) \in \Pi = \mathbb{X} \times \mathbb{T}$, $\mathbb{X} = [0,X]$, $\mathbb{T} = [0,T]$. Функция $a(x)$ называется *весом*.

Исследуются свойства этого оператора. В качестве приложения рассматривается задача Коши для интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Du(x,t) + \varphi(x,t). \tag{2}$$

Актуальность проблемы связана с тем, что такие уравнения возникают в теории упругости и моделях биологических процессов: задаче Проктора о равновесии упругой балки, задаче Вольтерра о крутильных колебаниях, задаче Прандтля расчета крыла самолета [1], задаче распределения богатства страны [2] и т.д.

Замечание 1. Можно было бы рассмотреть уравнение, полученное дифференцированием по x:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \widetilde{D}u(x,t) + \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

с оператором

$$\widetilde{D} = b(x)\frac{\partial}{\partial x} + \big(a(x) + b'(x)\big)I,$$

и решить его известными методами: к примеру, методом Фурье, методом последовательных приближений с введением функции Римана [3], сведением к равносильной системе [4] и т.д. Но, во-первых, такая операция приводит к повышению требований на гладкость функций $b(x)$, $\varphi(x,t)$ и искомой функции. А во-вторых, продифференцированное уравнение не равносильно исходному: для этого нужно ввести дополнительное условие, например, значение искомой функции в точке $x = 0$.

Если некоторый линейный оператор K ограничен, то его полугруппа $U_K(t)$ представима в виде операторной экспоненты [5]:

$$U_K(t) = \exp(tK) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} K^i. \tag{3}$$

1. Линейность и ограниченность оператора D

Определим далее пространство $C(\mathbb{X})$ непрерывных на $\mathbb{X}$ функций.

Теорема 1. *Пусть функции* $a(x), b(x) \in C(\mathbb{X})$. *Тогда оператор* D, *определяемый формулой* (1), *линеен и ограничен в пространстве* $C(\mathbb{X})$.

Доказательство. Вводятся некоторые функции $v(x), w(x) \in C(\mathbb{X})$ и скаляр $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Линейность. Так как операторы D_1, D_2 линейны, то

а) $$Dv + Dw = (D_1 + D_2)v + (D_1 + D_2)w = D_1v + D_2v + D_1w + D_2w =$$
$$= D_1v + D_1w + D_2v + D_2w = D_1(v + w) + D_2(v + w) = D(v + w);$$

б) $$D(\alpha v) = (D_1 + D_2)(\alpha v) = D_1(\alpha v) + D_2(\alpha v) =$$
$$= \alpha D_1v + \alpha D_2v = \alpha(D_1 + D_2)v = \alpha Dv.$$

2. Ограниченность. Так как функции $a(x), b(x) \in C(\mathbb{X})$, то по теореме Вейерштрасса они имеют максимумы на $\mathbb{X}$; обозначим их m_a, m_b. В пространстве $C(\mathbb{X})$ норма функции $v(x)$ определяется формулой
$$\|v\| = \max_{x\in\mathbb{X}}|v(x)|.$$

Пользуясь свойством монотонности интеграла имеем:
$$\|D_1v\| \le \int_0^x |a(s)||v(s)|ds \le \int_0^x \max_{s\in\mathbb{X}}|a(s)| \max_{s\in\mathbb{X}}|v(s)|\, ds =$$
$$= m_a\|v\| \int_0^x ds = m_a\|v\|x \le m_a\|v\|X.$$

Далее, для оператора D_2 имеем:
$$\|D_2v\| = |b(x)||v(x)| \le \max_{x\in\mathbb{X}}|b(x)| \max_{x\in\mathbb{X}}|v(x)| = m_b\|v\|.$$

Теперь, неравенство треугольника и оценки выше влекут
$$\|Dv\| \le \|D_1v\| + \|D_2v\| \le \mu\|v\|,$$
с положительной константой $\mu = m_aX + m_b$, что и означает [6] ограниченность оператора D. Теорема доказана.

2. Утверждения о степени суммы операторов

Вводится биномиальный коэффициент
$$C_j^i = \frac{j!}{i!\,(j-i)!}.$$

Теорема 2. *Пусть* P, Q *– некоторые линейные операторы, некоммутативные по умножению. Пусть* $S_{i,j}^{P,Q}$ *– сумма по всевозможным перестановкам* *из i элементов P и j элементов Q. Тогда справедлив следующий аналог бинома Ньютона:*

$$(P+Q)^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n-i,i}^{P,Q}, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (4)$$

Доказательство. Докажем утверждение методом математической индукции. При $n = 1$ оно очевидно; можно записать

$$(P+Q)^1 = S_{1,0}^{P,Q} + S_{0,1}^{P,Q} = \sum_{i=0}^{1} S_{1-i,i}^{P,Q}.$$

При $n = 2$, раскрывая скобки слева направо и группируя слагаемые, имеем:

$$(P+Q)^2 = (P+Q)(P+Q) = P(P+Q) + Q(P+Q) = \\ = (PP+PQ) + (QP+QQ) = PP + (PQ+QP) + QQ.$$

Всевозможные перестановки из элементов P, Q – это PQ, QP. В силу определения $S_{i,j}^{P,Q}$, последнее равенство можно переписать:

$$(P+Q)^2 = S_{2,0}^{P,Q} + S_{1,1}^{P,Q} + S_{0,2}^{P,Q} = \sum_{i=0}^{2} S_{2-i,i}^{P,Q}.$$

Теперь возьмем $n = 3$. Пользуясь полученным выше результатом, имеем:

$$(P+Q)^3 = (P+Q)(P+Q)^2 = P(P+Q)^2 + Q(P+Q)^2 =$$

$$= P(PP + (PQ+QP) + QQ) + Q(PP + (PQ+QP) + QQ) =$$

$$= PPP + (P(PQ+QP) + QPP) + \big(PQQ + Q(PQ+QP)\big) + QQQ.$$

Всевозможные перестановки из двух элементов P и одного элемента Q – это слагаемые в первой скобке в последнем равенстве; всевозможные перестановки из одного элемента P и двух элементов Q – это слагаемые во второй скобке. Перепишем это равенство:

$$(P+Q)^3 = S_{3,0}^{P,Q} + S_{2,1}^{P,Q} + S_{1,2}^{P,Q} + S_{0,3}^{P,Q} = \sum_{i=0}^{3} S_{3-i,i}^{P,Q}.$$

Пусть оно верно для $n = k$. Тогда для $n = k + 1$ имеем:

$$(P+Q)^{k+1} = (P+Q)(P+Q)^k =$$

$$= P\sum_{i=0}^{k} S_{k-i,i}^{P,Q} + Q\sum_{i=0}^{k} S_{k-i,i}^{P,Q} = \sum_{i=0}^{k} PS_{k-i,i}^{P,Q} + \sum_{i=0}^{k} QS_{k-i,i}^{P,Q}.$$

В первой сумме выделим слагаемое при $i = 0$, а во второй – слагаемое при $i = k$ и заменим i на $i - 1$:

$$(P+Q)^{k+1} = PS_{k0}^{P,Q} + \sum_{i=1}^{k} PS_{k-i,i}^{P,Q} + \sum_{i=0}^{k} QS_{k-i,i}^{P,Q} + QS_{0k}^{P,Q} =$$

$$= S_{k+1,0}^{P,Q} + \sum_{i=1}^{k}\left(PS_{k-i,i}^{P,Q} + QS_{k-i+1,i-1}^{P,Q}\right) + S_{0,k+1}^{P,Q}.$$

Рассмотрим в последнем равенстве слагаемое с суммой. После группировки слагаемых в ней получим сумму из C_k^1 перестановок из k элементов P и 1 элемента Q, далее, C_{k-1}^2 перестановок из $k-1$ элементов P и 2 элементов Q, затем C_{k-2}^3 перестановок из $k-2$ элементов P и 3 элементов Q и т. д., заканчивая C_{k-1}^2 перестановками из 2 элементов P и $k-1$ элементов Q и C_k^1 перестановками из 1 элемента P и k элементов Q. Это означает, что

$$PS_{k-i,i}^{P,Q} + QS_{k-i+1,i-1}^{P,Q} = S_{k-i+1,i}^{P,Q} = S_{k+1-i,i}^{P,Q},$$

откуда

$$(P+Q)^{k+1} = S_{k+1,0}^{P,Q} + \sum_{i=1}^{k} S_{k+1-i,i}^{P,Q} + S_{0,k+1}^{P,Q} = \sum_{i=0}^{k+1} S_{k+1-i,i}^{P,Q},$$

что влечет требуемое. Теорема доказана.

Замечание 2. Пусть теперь P, Q коммутативны по умножению. Тогда формула (4) упрощается:

$$(P+Q)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i P^i Q^{n-i}. \qquad (5)$$

3. Полугруппа оператора *D*

В силу теоремы 1 полугруппа $U_D(t, x)$ оператора D представима в виде выражения (3). Операторы D_1, D_2, вообще говоря, некоммутативны по умножению: действительно,

$$D_1(D_2 f) = \int_0^x a(s)b(s)f(s)ds, \quad D_2(D_1 f) = b(x)\int_0^x a(s)f(s)ds$$

и $D_1(D_2 f) \neq D_2(D_1 f)$.

Вычислим первые степени этого оператора, применив формулу (4). Имеем:

$$D^2=\int_0^x\int_0^s a(s)a(z)(\cdot)dz\,ds+\int_0^x a(s)\beta_{21}(s,x)(\cdot)ds+b^2(x)I,$$

$$D^3=\int_0^x\int_0^s\int_0^z a(s)a(z)a(r)(\cdot)drdzds+$$

$$+\int_0^x\int_0^s a(s)a(z)\beta_{32}(z,s,x)(\cdot)dzds+\int_0^x a(s)\beta_{31}(z,s,x)(\cdot)ds+b^3(x)I,$$

$$D^4=\int_0^x\int_0^s\int_0^z\int_0^r a(s)a(z)a(r)a(\rho)(\cdot)d\rho drdzds+ \tag{6}$$

$$+\int_0^x\int_0^s\int_0^z a(s)a(z)a(r)\beta_{43}(r,z,s,x)(\cdot)drdzds+$$

$$+\int_0^x\int_0^s a(s)a(z)\beta_{42}(z,s,x)(\cdot)dzds+\int_0^x a(s)\beta_{41}(s,x)(\cdot)ds+b^4(x)I,$$

в обозначениях:

$$\beta_{21}(s,x)=b(s)+b(x),$$

$$\beta_{32}(z,s,x)=b(z)+b(s)+b(x),\ \ \beta_{31}(z,s,x)=b^2(s)+b(x)b(s)+b^2(x),$$

$$\beta_{43}(r,z,s,x)=b(r)+b(z)+b(s)+b(x),$$

$$\beta_{42}(z,s,x)=b^2(z)+b^2(s)+b^2(x)+b(z)b(s)+b(z)b(x)+b(s)b(x),$$

$$\beta_{41}(s,x)=b^3(s)+b^3(x)+b^2(s)b(x)+b(s)b^2(x).$$

Но в частном случае $a(x)\equiv a=\text{const}$, $b(x)\equiv b=\text{const}$ операторы D_1, D_2 коммутативны по умножению. Пользуясь формулой (5), можно выписать выражение в явном виде для D^k:

$$D^0=I,\ \ D^1=D,$$

$$D^k=(D_1+D_2)^k=b^kI+kab^{k-1}\int_0^x(\cdot)ds+ \tag{7}$$

$$+\sum_{i=2}^k C_k^i a^i b^{k-i}\int_0^x\int_0^{s_0}\dots\int_0^{s_{i-2}}(\cdot)ds_{i-1}ds_{i-2}\dots ds_0,\ \ k=2,3,\dots.$$

4. Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения

Рассматривается задача Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Du(x,t) + \varphi(x,t), \tag{2}$$

$$u(x,0) = h(x), \tag{8}$$

где оператор D определяется формулой (1), $\varphi(x,t)$, $h(x)$ – заданные функции; $(x,t) \in \Pi$.

Под решением задачи (2), (8) подразумевается функция $u(x,t)$, дифференцируемая по t при каждом $x \in \mathbb{X}$ и непрерывная в Π.

Применение результатов монографии [5] и полученных выше приводит к следующему утверждению.

Теорема 3. *Пусть функции* $a(x), b(x) \in C(\mathbb{X})$, $\varphi(x,t) \in C(\Pi)$. *Тогда решение задачи* (2), (8) *существует, единственно и определяется формулой*

$$u(x,t) = U_D(t,x)h(x) + \int_0^t U_D(t-s,x)\varphi(x,s)ds.$$

Полугруппу $U_D(t,x)$ можно вычислить по формулам (3), (4), (6), либо (3), (7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Шишкин, Г. А. Линейные интегро-дифференциальные уравнения Фредгольма / Г. А. Шишкин // Учебное пособие по спецкурсу и спецсеминару. – Улан-Удэ, Изд-во Бурятского госуниверситета, 2007. – 208 с.

2 Хачатрян, А. Х. Об одном интегро-дифференциальном уравнении в задаче распределения дохода / А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян // Экономика и математические методы. – 2009. – Т. 45, № 4. – с. 84-96.

3 Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – Москва : Наука, 2004. – 798 с.

4 Баев, А. Д. Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции / А. Д. Баев, С. П. Зубова, В. И. Усков // Вестник Воронежского госуниверситета. Серия : Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 134-140.

5 Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. – Москва : Наука, 1967. – 464 с.

6 Бирман, М. Ш. Функциональный анализ / М. Ш. Бирман, Н. Я. Виленкин, Е. А. Горин. – Москва : Наука, 1972. – 544 с.