УДК 624.072.21.7 DOI: 10.34220/2311-8873-2021-4-4-36-43

ЧИСТЫЙ ИЗГИБ УПРУГОГО КРИВОГО БРУСА

Огарков В.Б., Аксенов А.А., Малюков С.В., Князев А.В., Бородин Н.А.
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова»
E-mail: mf@vglta.vrn.ru

Аннотация: Рассмотрена задача чистого изгиба упругого кривого бруса заданным моментом M. Доказано, что найденные в данной работе значения напряжений и деформаций зависят от величины коэффициента Пуассона μ. Получено точное аналитическое решение данной задачи с определением однозначных выражений для напряжений и деформаций.

Ключевые слова: изгиб упругого бруса, коэффициент Пуассона, закон Гука.

PURE BENDING OF ELASTIC CURVE OF A BEAM

Ogarkov V.B., Aksenov A.A., Malyukov S.V., Knyazev A.V., Borodin N.A.
Federal State Budget Educational Institution of Higher Education «Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov»
E-mail: mf@vglta.vrn.ru

Summary: The problem of pure bending of an elastic curved beam with a given moment M is considered. It is proved that the values of stresses and strains found in this paper depend on the value of the Poisson's ratio μ. An exact analytical solution to this problem is obtained with the determination of unambiguous expressions for stresses and deformations.

Keywords: elastic beam bending, Poisson's ratio, Hooke's law.

Рассмотрим задачу чистого изгиба изотропного упругого бруса под действием сосредоточенного изгибающего момента M [1, 3-6]:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0; \tag{1}$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \tag{2}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}\right) - r\frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0. \tag{3}$$

В случае плоского напряженного состояния закон Гука имеет вид:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \mu\sigma_\theta]; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \mu\sigma_r]; \tag{4}$$

$$\sigma_z = 0; \quad \varepsilon_z = 0. \tag{5}$$

Разрешим закон Гука относительно напряжений:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\mu^2)}[\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta]; \quad \sigma_\theta = \frac{E}{(1-\mu^2)}[\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r]. \tag{6}$$

Будем искать деформации в следующем виде:

$$\varepsilon_\theta = \frac{\omega}{r} + A_1; \quad \varepsilon_r = \frac{d\omega}{dr} + A_2, \tag{7}$$

где A_1 и A_2 – искомые константы; $\omega(r)$ – неизвестная функция.

Подставим напряжения (6) в уравнение равновесия (1):

$$r\frac{d\varepsilon_r}{dr} + \mu r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + (1-\mu)(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) = 0. \tag{8}$$

Подставим формулы (7) в уравнение (8):

$$r\frac{d^2\omega}{dr^2} + \mu\frac{d}{dr}\left(\frac{\omega}{r}\right) + (1-\mu)\left(\frac{d\omega}{dr} - \frac{\omega}{r} + A_2 - A_1\right) = 0; \tag{9}$$

$$r\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{d\omega}{dr} - \frac{\omega}{r} = (1-\mu)(A_1 - A_2); \tag{10}$$

$$\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\omega}{dr} - \frac{\omega}{r^2} = \frac{(1-\mu)(A_1 - A_2)}{r}. \tag{11}$$

Решение уравнения (11) имеет вид:

$$\omega(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} + C_3 r\ln r; \tag{12}$$

$$2C_3 = (1-\mu)(A_1 - A_2); \tag{13}$$

$$C_3 = \frac{(1-\mu)}{2}(A_1 - A_2). \tag{14}$$

Найдем напряжения по формулам (6):

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\mu^2)}\{\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta\}; \quad \sigma_\theta = \frac{E}{(1-\mu^2)}\{\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r\}; \tag{15}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\omega}{r} + A_1 = C_1 + \frac{C_2}{r^2} + C_3\ln r + A_1; \tag{16}$$

$$\varepsilon_r = \frac{d\omega}{dr} + A_2 = C_1 - \frac{C_2}{r^2} + C_3\ln r + C_3 + A_2; \tag{17}$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\mu^2)}\left[C_1 + C_3 + A_2 - \frac{C_2}{r^2} + C_3 \ln r + \right.$$

$$\left. + \mu\left\{C_1 + A_1 + \frac{C_2}{r^2} + C_3 \ln r\right\}\right] = \tag{18}$$

$$= \frac{E}{(1-\mu^2)}\left[(1+\mu)C_1 + C_3 + A_2 + \mu A_1 + (\mu - 1)\frac{C_2}{r^2} + C_3(1+\mu)\ln r\right];$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1-\mu^2)}\left[C_1 + A_1 + \frac{C_2}{r^2} + C_3 \ln r + \right.$$

$$\left. + \mu\left\{C_1 + C_3 + A_2 - \frac{C_2}{r^2} + C_3 \ln r\right\}\right] = \tag{19}$$

$$= \frac{E}{(1-\mu^2)}\left[(1+\mu)C_1 + A_1 + \mu A_2 + \mu C_3 + (1-\mu)\frac{C_2}{r^2} + C_3(1+\mu)\ln r\right].$$

Для кривого бруса имеем следующие граничные условия [1, 7-10]:

$$\sigma_r(r = r_1) = 0; \quad \sigma_r(r = r_2) = 0; \tag{20}$$

$$\int_{r_1}^{r_2} r\sigma_\theta dr = M. \tag{21}$$

Подставим напряжение (18) в граничные условия (20):

$$(1+\mu)C_1 + C_3 + A_2 + \mu A_1 + (\mu - 1)\frac{C_1}{r_1^2} + C_3(1+\mu)\ln r_1 = 0; \tag{22}$$

$$(1+\mu)C_1 + C_3 + A_2 + \mu A_1 + (\mu - 1)\frac{C_2}{r_2^2} + C_3(1+\mu)\ln r_2 = 0; \tag{23}$$

$$(\mu - 1)C_2\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) + C_3(1+\mu)\ln\frac{r_2}{r_1} = 0; \tag{24}$$

$$\frac{(\mu-1)(r_1^2 - r_2^2)}{r_1^2 r_2^2}C_2 = C_3(1+\mu)\ln\frac{r_1}{r_2}; \tag{25}$$

$$C_2 = \frac{(1+\mu)r_1^2 r_2^2 \ln\frac{r_1}{r_2}}{(\mu-1)(r_1^2 - r_2^2)}C_3; \tag{26}$$

$$(1+\mu)C_1 = -C_3 - A_2 - \mu A_1 + (1-\mu)\frac{C_2}{r_1^2} - C_3(1+\mu)\ln r_1; \tag{27}$$

$$(1+\mu)C_1 = -C_3[1 + (1+\mu)\ln r_1] - A_2 - \mu A_1 + \frac{r_2^2 \ln\frac{r_1}{r_2}\ln r_1}{(r_2^2 - r_1^2)}C_3 =$$

$$= -(A_2 + \mu A_1) + \left\{\frac{r_2^2 \ln\frac{r_1}{r_2}\ln r_1}{(r_2^2 - r_1^2)} - 1 - (1+\mu)\ln r_1\right\}C_3; \tag{28}$$

$$C_1 = -\frac{(A_2 + \mu A_1)}{(1+\mu)} + \frac{1}{(1+\mu)}\left\{\frac{r_2^2 \ln\frac{r_1}{r_2}\ln r_1}{(r_2^2 - r_1^2)} - 1 - (1+\mu)\ln r_1\right\}C_3. \quad (29)$$

Рассмотрим граничное условие (21):

$$r\sigma_\theta = \frac{Er}{(1-\mu^2)}\Big[(1+\mu)C_1 + A_1 + \mu A_2 + (1-\mu)\frac{C_2}{r^2} + \\ +\mu C_3 + (1+\mu)\ln r\, C_3]; \quad (30)$$

$$\int_{r_1}^{r_2}\Big[(1+\mu)C_1 r + A_1 r + \mu A_2 r + (1-\mu)\frac{C_2}{r} + \\ +\mu C_3 r + (1+\mu) r\ln r\, C_3]dr = \frac{(1-\mu^2)M}{E}; \quad (31)$$

$$\frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)[(1+\mu)C_1 + A_1 + \mu A_2] + (1-\mu)C_2\ln\frac{r_2}{r_1} + \\ +\frac{1}{2}\mu C_3(r_2^2 - r_1^2) + (1+\mu)C_3\int_{r_1}^{r_2} r\ln r\,dr = \frac{(1-\mu^2)M}{E}; \quad (32)$$

$$\int r\ln r\,dr = r(r\ln r - r) - \int (r\ln r - r)dr = \\ = r^2\ln r - r^2 - \int r\ln r\,dr + \frac{r^2}{2} = \\ = r^2\ln r - \frac{r^2}{2} - \int r\ln r\,dr; \quad (33)$$

$$2\int r\ln r\,dr = r^2\ln r - \frac{r^2}{2}; \quad (34)$$

$$\int r\ln r\,dr = \frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}. \quad (35)$$

Формула (32) принимает такой вид:

$$\frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)(A_1 + \mu A_2) + \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)(1+\mu)C_1 + (1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}C_2 + \\ +\frac{\mu C_3}{2}(r_2^2 - r_1^2) + \frac{(1+\mu)C_3}{2}\left[r_2^2\ln r_2 - r_1^2\ln r_1 + \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2)\right] = \\ = \frac{(1-\mu^2)M}{E}; \quad (36)$$

$$\frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)(1+\mu)C_1 + (1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}C_2 + \\ + \frac{C_3}{2}\left\{\mu(r_2^2 - r_1^2) + (1+\mu)\left[r_2^2\ln r_2 - r_1^2\ln r_1 + \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2)\right]\right\} = \\ = \frac{(1-\mu^2)M}{E} - \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)(A_1 + \mu A_2); \tag{37}$$

$$\frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\left\{-A_2 - \mu A_1 + \left[\frac{r_2^2\ln\frac{r_1}{r_2}\ln r_1}{(r_2^2 - r_1^2)} - 1 - (1+\mu)\ln r_1\right]C_3\right\} + \\ + \frac{(1+\mu)r_1^2 r_2^2\ln^2\frac{r_1}{r_2}}{(r_1^2 - r_2^2)}C_3 + \frac{C_3}{2}\{\mu(r_2^2 - r_1^2) + \\ + (1+\mu)[r_2^2\ln r_2 - r_1^2\ln r_1] + \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2)\Big\} = \\ = \frac{(1-\mu^2)M}{E} - \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)(A_1 + \mu A_2). \tag{38}$$

Решение уравнения (38) запишем так:

$$C_3 = \frac{D_1}{D_2}; \tag{39}$$

$$D_1 = \frac{(1-\mu^2)M}{E} - \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)(A_1 + \mu A_2) + \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)(A_2 - \mu A_1); \tag{40}$$

$$D_2 = \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\left[\frac{r_2^2\ln\frac{r_1}{r_2}\ln r_1}{(r_2^2 - r_1^2)} - 1 - (1+\mu)\ln r_1\right] + \\ + \frac{(1+\mu)r_1^2 r_2^2\ln^2\frac{r_1}{r_2}}{(r_1^2 - r_2^2)} + \frac{1}{2}\left\{\mu(r_2^2 - r_1^2) + \frac{(1+\mu)}{2}(r_1^2 - r_2^2) + \\ + (1+\mu)[r_2^2\ln r_2 - r_1^2\ln r_1]\right\}; \tag{41}$$

$$D_1 = \frac{(1-\mu^2)M}{E} + \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2}(1-\mu)(A_1 - A_2); \tag{42}$$

$$D_2 = \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\left[\frac{r_2^2\ln\frac{r_1}{r_2}\ln r_1}{(r_2^2 - r_1^2)} - 1 - (1+\mu)\ln r_1\right] + \\ + \frac{(1+\mu)r_1^2 r_2^2\ln^2\frac{r_1}{r_2}}{(r_1^2 - r_2^2)} + \\ + \frac{1}{2}\left\{\frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2}(1+\mu) + (1+\mu)[r_2^2\ln r_2 - r_1^2\ln r_1]\right\}. \tag{43}$$

Используем формулу (14):

$$A_1 - A_2 = \frac{2C_3}{(1-\mu)}. \tag{44}$$

Коэффициент D_1 примет вид:

$$D_1 = \frac{(1-\mu^2)M}{E} + (r_2^2 - r_1^2)C_3. \tag{45}$$

Теперь будем иметь:

$$D_2 C_3 = \left[\frac{(1-\mu^2)M}{E} + (r_2^2 - r_1^2)C_3\right]; \tag{46}$$

$$C_3 = \frac{(1-\mu^2)M}{E(D_1 + r_1^2 - r_2^2)}. \tag{47}$$

Напряжения находятся по формулам (18) и (19), а деформации – по формулам (16) и (17).

Поскольку коэффициент D_2 явно зависит от коэффициента Пуассона μ, то все три коэффициента C_1, C_2 и C_3 тоже будут явно зависеть от коэффициента Пуассона.

Таким образом, найденные в данной работе значения напряжений и деформаций явно зависят от величины коэффициента Пуассона μ, что соответствует физическому смыслу.

В источниках [1, 11-14] приводятся следующие выражения для напряжений:

$$\sigma_r = \frac{4M}{K}\left(\frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}\ln\frac{r_2}{r_1} - r_2^2\ln\frac{r_2}{r} - r_1^2\ln\frac{r}{r_1}\right); \tag{48}$$

$$\sigma_\theta = \frac{4M}{K}\left(-\frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}\ln\frac{r_2}{r_1} - r_2^2\ln\frac{r_2}{r} - r_1^2\ln\frac{r}{r_1} + r_2^2 - r_1^2\right); \tag{49}$$

$$K = (r_2^2 - r_1^2) - 4r_1^2 r_2^2 \ln^2\frac{r_2}{r_1}. \tag{50}$$

Напряжения σ_r и σ_θ совсем не зависят от механических констант E и μ, что не соответствует физическому смыслу.

Формулы для деформаций (16) и (17) соответствуют двузначному выражению для радиального перемещения $u(r)$. Решение, приведенное в [1, 15-20], тоже приводит к двузначному выражению $u(r)$. Однако, это не противоречит общей формуле Череза [2], по которой находят вектор перемещения по заданным деформациям.

Если константа C_3 найдена, то в соответствии с формулой (14):

$$A_1 = \frac{2C_3}{(1-\mu)} + A_2. \quad (51)$$

Для определенности, можно положить $A_2 = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Варданян, Г. С. Сопротивление материалов / Г.С. Варданян, В. И. Андреев, Н. М. Атаров, А. А. Горшков. – М. : «Наука», 1995. – 568 с.

2 Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М. : «Мир», 1975. – 864 с.

3 Огарков, В. Б. Чистый изгиб упругого кривого бруса / В. Б. Огарков, В. М. Бугаков, К. Е. Бухтоярова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Международная конференция. – 2012. – С. 293-295.

4 Аксенов, А. А. Полный расчет на прочность упругой балки при изгибе / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2018. – Т. 1. – № 1 (23). – С. 75-80.

5 Горшков, А. Г. Сопротивление материалов : учеб. пособ. / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – 2-е издание испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.

6 Кучерявый, В. И. Теория упругости : учеб. пособие / В. И. Кучерявый. – Ухта : УГТУ, 2011. – 126 с.

7 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов : учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – 10-е издание, перераб. и доп. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.

8. Аксенов, А. А. Расчет напряженно-деформированного состояния изотропного упругого цилиндра при стационарном тепловом воздействии / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2017. – Т. 1. – № 1 (19). – С. 39-47.

9 Chida, Tomohiro A Proposed Standard Test Method for Shear Failure and Estimation of Shear Strength of Japanese Cedar I. Shear failure test of Japanese cedar laminates using wood material as stiffener and finite element analysis, and estimation of shear modulus : T. Chida, T. Sasaki, H. Yamauchi, Y. Okazaki, Y. Kawai, Y. Iijima, // Mokuzai gakkaishi. – 2012. – Т. 58. – Вып. 5. – С. 260-270. – DOI : 10.2488/jwrs.58.260.

10 Krotov, V. Application of the method of the principal components for the analysis of bearing ability of the wheel pair of the car : V. Krotov, S. Krotov //

Transport Problems. – 2009. – Vol. 4. – № 4. pp. 15-23.

11 Shlyannikov, V. N. Method for assessment of the residual life of turbine disks : V. N. Shlyannikov, R. R. Yarullin // Inorganic Materials. – 2010. Vol. 46. – № 15. – pp. 1683-1687.

12 Dumail, Jf. Smear and compression behavior of wood in relation to mechanical pulping : Jf. Dumail, L. Salmen // Tappi international mechanical pulping conference. – 1999. – С. 213-219

13 Galicki, J. A new approach to formulate the general strength theories for anisotropic discontinuous materials. Part A: The experimental base for a new approach to formulate the general strength theories for anisotropic materials on the basis of wood : J. Galicki, M. Czech // Applied mathematical modeling. – 2013. – Т. 37. – Вып. 3. – С. 815-827. – DOI: 10.1016/j.apm.2012.03.004.

14 Водопьянов, В. И. Курс сопротивления материалов с примерами и задачами : учеб. пособие / В. И. Водопьянов, А. Н. Савкин, О. В. Кондратьев; ВолгГТУ. – Волгоград, 2012. – 136 с.

15 Ашкенази, Е. К. Анизотропия древесины и древесных материалов : учеб. / Е. К. Ашкенази. – М. : Лесная промышленность, 1978. – 224 с.

16 Огарков, В. Б. Чистый изгиб упругого кривого бруса из ортотропного материала / В. Б. Огарков, А. А. Аксенов, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2017. – Т. 4. – № 4 (22). – С. 78-83.

17 Benabou, L. Predictions of compressive strength and kink band orientation for wood species : L. Benabou // Mechanics of materials. – 2008. – Т. 42. – Вып. 3. – С. 335-343. – DOI : 10.1016/j.mechmat.2009.11.015.

18 Burgert, I. The tensile strength of isolated wood rays of beech (Fagus sylvatica L.) and its significance for the biomechanics of living trees : I. Burgert, D. Eckstein // Trees-structure and function. – 2001. – Т. 15. – Вып. 3. – С. 168-170. – DOI: 10.1007/s004680000086.

19 Aydemir, D. The Lap Joint Shear Strength of Wood Materials Bonded by Cellulose Fiber-Reinforced Polyvinyl Acetate : D.Aydemir // Bioresources. – 2014. – Т. 9. – Вып. 1. – С. 1179-1188.

20 De Magistris, F Deformation of wet wood under combined shear and compression : F. De Magistris, L. Salmen // Wood science and technology. – 2005. – Т. 39. – Вып. 6. – С. 460-471. – DOI: 10.1007/s00226-005-0025-x.