



**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ШИН
С БАРАБАНАМИ ИСПЫТАТЕЛЬНЫХ
СТЕНДОВ И ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ
ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

Гудков Виктор Владимирович,

к.т.н., доцент, доцент кафедры автомобильной подготовки ВУНЦ ВВС «ВВА им. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж.

✉¹ **Сокол Павел Александрович,**

к.т.н., преподаватель кафедры автомобильной подготовки ВУНЦ ВВС «ВВА им. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, e-mail: pavsokol@yandex.ru

Аннотация. В статье проанализированы способы и методы испытаний пневматических шин на стендах различной конструкции, рассмотрены их достоинства и недостатки. Приведены ограничения, влияющие на качество проведения испытаний шин и на их результаты. Рассмотрены характерные особенности проведения стендовых испытаний пневматических шин, а также возможность прогнозирования их надежности и предполагаемой нормы наработки в реальных условиях эксплуатации автомобилей. Проанализирован выбор режимов проведения испытаний, оказывающий существенное влияние на полученные результаты при оценке их надежности, возможной степени влияния на безопасность дорожного движения и норму наработки пневматических шин.

**COMPARATIVE ANALYSIS OF THE
INTERACTION PROCESSES OF
PNEUMATIC TIRES WITH TEST STAND
DRUM AND HORIZONTAL SUPPORT
SURFACE**

Gudkov Viktor Vladimirovich,

candidate of technical sciences, associate professor, associate of department of automotive training, Military Education and Scientific Center of the Air Force N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy (Voronezh) the Ministry of Defense of the RF, Voronezh.

✉¹ **Sokol Pavel Alexandrovich,**

candidate of technical sciences, lecturer of department of automotive training, Military Education and Scientific Center of the Air Force N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy (Voronezh) the Ministry of Defense of the RF, Voronezh, e-mail: pavsokol@yandex.ru

Annotation. The article analyzes the methods and techniques for testing pneumatic tires on various types of testing stands, and discusses their advantages and disadvantages. The limitations that affect the quality of tire testing and its results are listed. The article discusses the specific features of bench tests of pneumatic tires, as well as the possibility of predicting their reliability and expected service life under real-world vehicle operating conditions. The choice of test modes, which has a significant impact on the results obtained when assessing their reliability, the possible degree of influence on road safety, and the service life of pneumatic tires, has been analyzed.

Ключевые слова: ПНЕВМАТИЧЕСКАЯ ШИНА, ИСПЫТАНИЯ, БАРАБАН, СОПРОТИВЛЕНИЕ КАЧЕНИЮ, НАГРУЗКИ, СТЕНДОВЫЕ, НАТУРНЫЕ. **Keywords:** PNEUMATIC TIRE, TESTS, DRUM, RESISTANCE TO SWING, LOADS STAND, NATURAL.

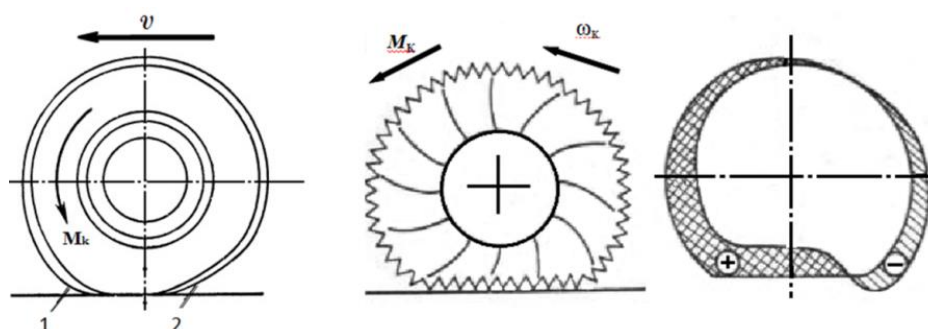
¹ Автор для ведения переписки

1 Актуальность, постановка вопроса, план исследования (обзора)

При движении автомобиля от его ведущих колес на опорную поверхность (ОП) действуют как вертикальные нагрузки, так и сдвигающие усилия. При этом тяговая реакция ОП, находящаяся в области их контакта, будет величиной переменной и зависящей от ее прочностных и иных характеристик, характера и величины действующих на нее нагрузок, конструктивных особенностей пневматических шин и коэффициента буксования колес. Причем характер нагрузок, действующих на ОП будет различен в зависимости от режима качения колес, действующие внешние силы могут изменять свою величину, а в некоторых случаях – и направление действия. Описание процессов взаимодействия ведущих колес с различными типами ОП представляет собой очень сложную задачу, связанную со множественными показателями, характеризующими их параметры (плотность, коэффициент внутреннего трения, влажность, липкость и т.д.). При этом, на характер взаимодействия ведущих колес с ОП оказывают влияние размер и форма области их контакта (отношение длины области контакта к ее ширине), характер распределения удельных давлений по площади контакта, конструкция грунтозацепов и их шаг (насыщенность профиля). При качении колеса кроме непрерывной деформации шины (изгиба, сжатия и растяжения) и ее трения по ОП беговая дорожка протектора подвергается систематическим и сосредоточенным ударным нагрузкам от неровностей и препятствий, находящихся на ОП, приводящим к значительному ее нагреву и потере прочности материала покрышки. В то же время внешние нагрузки, действующие на шину при качении, распределяются по ее элементам неравномерно, т.к. в каждый момент времени они находятся в рабочей части шины, когда остальные ее части находятся без нагрузки, что проявляется в неравномерном давлении элементов протектора шины на ОП.

В настоящее время существуют несколько противоречивых теорий, описывающих процессы качения и проскальзывания (буксования) элементов протектора пневматической шины относительно ОП, ввиду сложного механизма их взаимодействия при качении колеса, который усложняется циклически изменяющимися контактными деформациями и напряжениями, зависящими, в свою очередь, от конструкции каркаса, типа, числа слоев корда (нормы слойности) и геометрических размеров шины. При этом образуются участки сжатия и расширения элементов беговой дорожки протектора шины по ширине и высоте профиля (рис. 1). Учитывая различную скорость нагружения и восстановления шины в области загрузки и разгрузки, с увеличением скорости качения возможно снижение размеров области разгрузки и перераспределение вертикальной нагрузки несимметрично по вертикальной оси.

Максимальное значение нагрузки, действующей в области контакта, будет состоять из нагрузки, действующей от сжатия воздуха, при изменении внутреннего объема шины, связанного с прогибом ее каркаса, и нагрузки от деформации каркаса шины по высоте ее профиля [1]. Сжатый воздух будет создавать дополнительную нагрузку на шину, но, придавая ей дополнительную упругость, оптимальную конфигурацию рабочего профиля, распределяя значительную часть нагрузки от области контакта по ее внутренней поверхности. При этом будет происходить изменение длины области контакта шины с ОП из-за деформации шины по ширине ее профиля, находящегося в области контакта.



1 – участок сжатия шины (+); 2 – участок растяжения шины (-);
 M_k – крутящий момент; ω_k – угловая скорость вращения колеса

Рисунок 1 – Деформация участков пневматической шины при качении

Действие внешней боковой силы, направленной перпендикулярно плоскости колеса, приводит к деформации шины в поперечном (боковом) направлении, способствуя уводу колеса Δ с первоначальной траектории при криволинейном движении, приводя к увеличению величины трения скольжения по ОП (рис. 2) [2]. При этом, каждая модель шины имеет определенные величины максимальной боковой силы и максимального угла увода без проскальзывания элементов ее протектора в боковом направлении. Способность шины к боковой деформации существенно влияет на управляемость автомобиля и его устойчивость при движении.

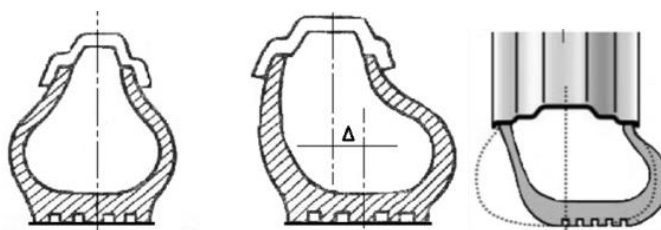


Рисунок 2 – Деформация пневматической шины под действием внешней боковой силы

Таким образом, при качении колеса происходит процесс сложной деформации шины в виде последовательных и непрерывных (циклических) изгибов выпрямлений боковых стенок по высоте профиля и беговой дорожки в рабочей части шины, при одновременном сжатии и растяжении элементов протектора по области контакта с ОП и на прилегающих к ней участках.

При движении по слабонесущим ОП повышенная эластичность пневматических шин и снижение в ней давления воздуха будут способствовать повышению проходимости при улучшении взаимодействия ведущих колес с ОП не вызывая перегрузок при ее деформации [3]. При этом, шина будет подобна гусеничной ленте с длиной опорной ленты, равной длине области контакта деформированной шины с ОП (рис. 3). Также, ввиду незначительного погружения колес в грунт будет иметь место меньшее сопротивление их качению. В общей сумме удельных нагрузок, действующих в области контакте колес с ОП, это приведет к тому, что доля удельных вертикальных нагрузок будет снижена, а доля допустимых горизонтальных нагрузок возрастет вместе с возрастающей удельной касательной силой.

Эффект гусеницы будет проявляться во времени воздействия уплотняющей силы на ОП и возрастет пропорционально увеличению длины области контакта колеса с ОП. Также, вследствие эластичности шины и переменного и неоднородного характера ее нагружения геометрические размеры и параметры имеют переменный характер, постоянно изменяясь в процессе качения, приводя к тому, что один и тот же параметр может иметь несколько значений [4].

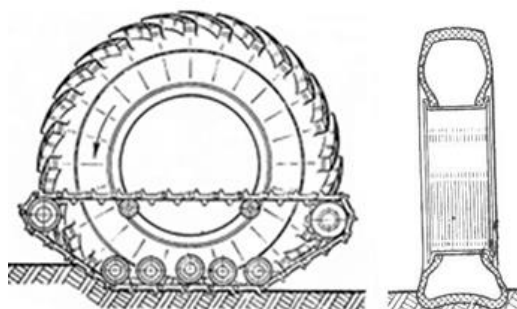
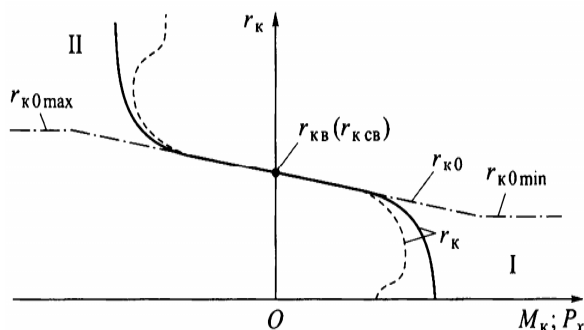


Рисунок 3 – Деформация пневматической шины с эффектом гусеницы

Каркас пневматической шины, состоящий из скрещивающихся слоев корда, имеет своеобразные механические свойства, что объясняется значительным различием жесткости резины шины и корда [5]. А механические свойства боковой поверхности (ширины профиля) шины зависят от угла, который составляют нити перекрещивающихся слоев корда, изменение которого ведет к изменению свойств и характеристик шины.

Также, при качении колеса возникают дополнительные силы, вызванные действием неоднородности шины (геометрической неоднородностью, неоднородным распределением масс, неоднородностью жесткостных характеристик) [6]. При этом, беговая дорожка протектора шины в области контакта с ОП выпрямляется (становится условно плоской), приводя к сжатию его подканавочного слоя и искривлению выступов, а боковые стенки становятся выпуклыми. Изменение величины кинематического радиуса колеса в зависимости от действия силовых параметров, тангенциальной эластичности и сцепных свойств беговой дорожки шины с ОП показано на рис. 4 [7].



I - зона буксования; II - зона юза; r_k – кинематический радиус; $r_{k\text{св}}$ – радиус качения в свободном режиме; r_{k0} – радиус чистого качения; $r_{k0\text{max}}$ – радиус максимального чистого качения в зоне буксования; $r_{k0\text{min}}$ – радиус минимального чистого качения в зоне юза

Рисунок 4 – Зависимость радиуса качения колеса от силовых параметров

При движении по недеформируемой ОП внутреннее давление воздуха в шине, как правило, является величиной постоянной [8]. Однако, деформация шины происходит при изменении комплекса внешних нагрузок и не является функцией одного параметра. Погрешности при расчетах вертикальной деформации шины могут привести к неточностям при определении: внешних реакций (вертикальной, горизонтальной и боковой) в области ее контакта с ОП; сопротивления качению; нагрузок, действующих на узлы и агрегаты трансмиссии и снижающих тяговые показатели колесного движителя. Неравномерность распределения нормальных напряжений показана на рис. 5. Как видно из его анализа, при качении шины по поверхности бегового барабана неравномерность распределения вертикальных напряжений обусловлена

жесткостью боковин шины и нагрузкой от момента сил при преодолении внешних сопротивлений [5]. Величина неравномерности зависит от нормы слоистости шины, и, соответственно, от жесткости боковин и беговой дорожки.

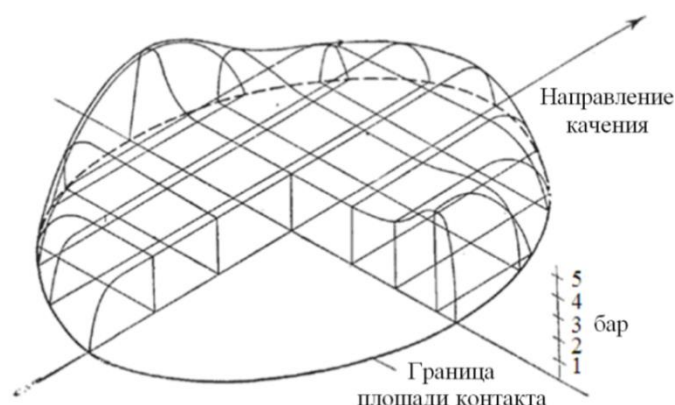
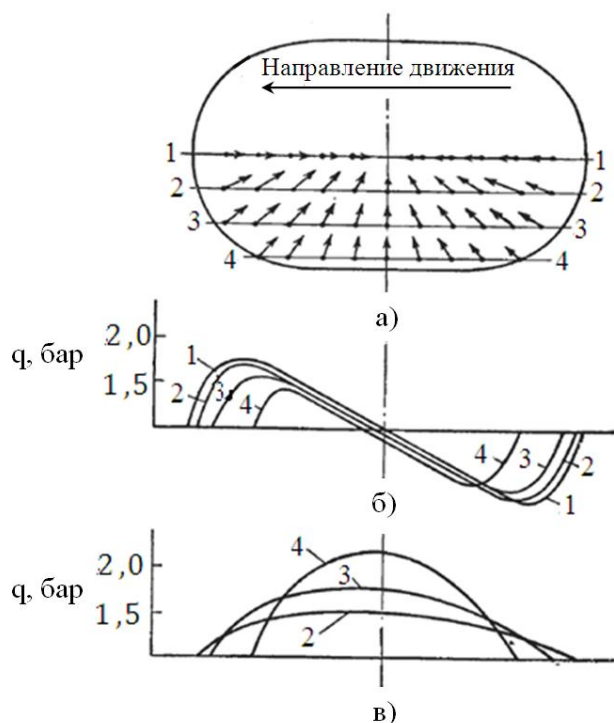


Рисунок 5 – Схема распределения давления в области контакта шины с беговым барабаном

При этом, деформация поверхностного слоя при нагружении шины вызывает появление касательных напряжений в области контакта с ОП, направленных к ее центру (рис. 6). Также, при качении колеса в разных сечениях шины действуют различные по величине касательные и нормальные напряжения, однако характер их изменения одинаков, что свидетельствует о наличии зон юза и буксования как в зоне разгрузки, так и в зоне загрузки. А наибольшие по величине напряжения будут наблюдаться по центральному сечению шины.



а) картина касательных напряжений; б) распределение касательных напряжений;
в) распределение нормальных напряжений; 1, 2, 3, 4 – продольные сечения области контакта

Рисунок 6 – Схема распределения касательных сил в области контакта шины и опорной поверхности

При движении по слабонесущим ОП, характеристики которых изменяются в широком диапазоне, для повышения проходимости транспортного средства давление воздуха в шине можно изменить в достаточно большом диапазоне (в 4-8 раз). При этом изменяется и величина вертикальной деформации шины, а также параметры беговой дорожки шины и ОП в области их контакта. В результате этого погрешности при аналитических расчетах увеличиваются, т.к. значительно возрастают потери полезной мощности на ее циркуляцию, а также увеличиваются нагрузки на трансмиссию и колесный движитель, приводя к снижению тяговых показателей.

Таким образом, рассматривая процессы и величины деформаций пневматической шины по области контакта в вертикальном и горизонтальном направлении можно выделить зоны, в которых касательные напряжения будут превышать возможности сцепления шины с ОП (грунт, асфальтобетон, металлическая поверхность барабана стенда).

В случае превышения касательных напряжений в некоторой зоне области контакта возможно возникновение проскальзывания элемента по ОП, которое будет сопровождаться повышенным износом протектора шины и снижением силы сцепления (тяги), что приведет к потере устойчивости и управляемости автомобиля. В связи с этим необходимо корректно учитывать особенности процессов, происходящих при проскальзывании элементов протектора шины в области контакта с ОП. Увеличение скорости движения автомобиля приведет к увеличению угловой скорости вращения колеса, способствуя повышению скорости загрузки в области загрузки шины, которая будет зависеть от скорости движения. При этом, скорость загрузки будет постоянной, и, зависящей только от жесткостных свойств шины. Следовательно, можно предположить наличие несимметричности нормальных напряжений по области контакта шины с ОП с возможным увеличением их величины, а также возможное увеличение зон проскальзывания с дальнейшим срывом колеса в буксование (скольжение).

2 Анализ информационных источников

Материал пневматической шины является эластомером, с резко выраженной способностью к высокоэластичным деформациям, развивающихся при сравнительно малых напряжениях, достигая 500-700 % от исходного размера, при этом, напряжение при деформации со временем снижается, т. е. происходит его релаксация [9]. В реальных условиях качения колеса нагружение шины происходит с различной скоростью, поэтому механические свойства резины шины будут определяться ее упругими свойствами при равновесии, а также релаксационными свойствами, связанными со скоростью установления этого равновесия. Процесс релаксации ускоряется при повышении температуры, поэтому механические свойства резины шины значительно зависят от ее температуры. При этом проявляются значительные несовпадения упругих характеристик шины при ее нагружении и разгрузке из-за действия явления внутреннего трения, количественной оценкой которого является величина, составляющая разность между работой, затраченной на ее нагружение и на разгрузку. Эта величина зависит от параметров шины, режимов деформирования и от температуры, при которой происходят процессы деформации. Экспериментально возможно определить величину внутреннего трения при проведении циклических режимов нагружения (которое зависит от температуры шины и от амплитуды ее деформации), учитывая изменение деформации и напряжения шины по времени [10].

В работах [11-14] показано, что внешнее трение резины протектора шины по ОП в области их контакта обусловлено преодолением адгезионных сил (возникающими между трущимися телами) и преодолением сопротивления объемной деформации материала шины при обтекании неровностей ОП, величина которых изменяется в зависимости от условий контакта с ОП. При этом на сухих и гладких ОП преобладает адгезионная составляющая внешних сил трения, а на влажных ОП – деформационная или гистерезисная составляющая. Соотношение между ними будет зависеть от внутреннего давления воздуха, шероховатости ОП, температуры и скорости относительного перемещения трущихся поверхностей. Экспериментально

было установлено, что коэффициент трения зависит от сочетания материала шины, конструкции трущихся объектов и режима качения по ОП, которые обуславливают изменения, протекающие как в материале шины, так и в геометрическом очертании неровностей ОП. При этом, значительное влияние на величину коэффициента трения оказывает площадь контакта беговой дорожки шины и ОП, которая зависит от геометрии ОП, ее состояния и вертикальной нагрузки на колесо. Поэтому, необходимо корректно вычислять величины коэффициентов трения для тщательного и точного выполнения условий проведения экспериментов [15].

При качении эластичного колеса происходит изменение его формы и геометрических размеров из-за неоднородной деформации пневматической шины (ввиду повышения жесткости ее материала при динамическом нагружении), а также из-за меняющихся условий образования области контакта с ОП и под действием внешних сил и внутреннего давления воздуха, что сопровождается циклическими изменениями напряженного состояния ее элементов [5].

В ходе проведения экспериментов по изучению деформаций пневматических шин были установлены отличия в характере деформаций шин различной конструкции [16]. Так, диагональные шины имели достаточно большую зону повышенной радиальной деформации и меньшую зону касательной деформации по сравнению с радиальными шинами, имеющими высокую жесткость брекерного пояса в касательном направлении, способствующую изменению направления касательного смещения в центре области ее контакта с ОП.

В работе [17] на основе анализа процессов неустойчивого качения колеса с упругой шиной в режиме автоколебаний по прямой (шимми) предположил, что шина в условиях деформации обладает вертикальной, боковой и пяточной жесткостью. При смещении обода в поперечном направлении деформация шины характеризовалась тремя составляющими и было принято допущение, что масса деформируемой части была незначительной и ей можно было пренебречь. При этом не учитывалась диссипация энергии, связанная с деформацией шины и не рассматривалась ее продольная деформация. А отсутствие проскальзывания беговой дорожки протектора шины в области контакта с ОП было предположением, на основании которого согласно теории М. В. Келдыша записывались уравнения кинематических связей. Однако отсутствие скольжения шины по ОП учитывалось при выполнении следующих условий:

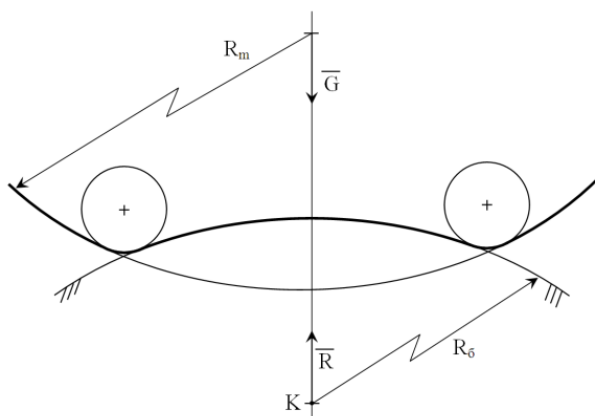
- при совпадении касательной к линии качения по ОП шины с осью области контакта;
- когда кривизна линии качения шины по ОП будет определяться тремя параметрами ее деформации.

Автор в работе [18] предложил метод определения деформации шины однодискового колеса в области контакта с ОП в условиях пренебрежимо незначительного его проскальзывания по ОП. При этом деформации были представлены суммой конечных деформаций при невозмущенном качении колеса и малых отклонениях.

В настоящее время используются несколько методов эксплуатационных испытаний автомобильных пневматических шин: дорожные, полигонные, ускоренные в условиях обычной эксплуатации и специальные дорожные, которые позволяют получить наиболее достоверные результаты по износу протектора. Также широко применяются и лабораторно-стендовые методы оценки его износостойкости, где проблемным и сложным вопросом является точная имитация основных условий нагружения пневматических шин, максимально соответствующих реальным условиям эксплуатации.

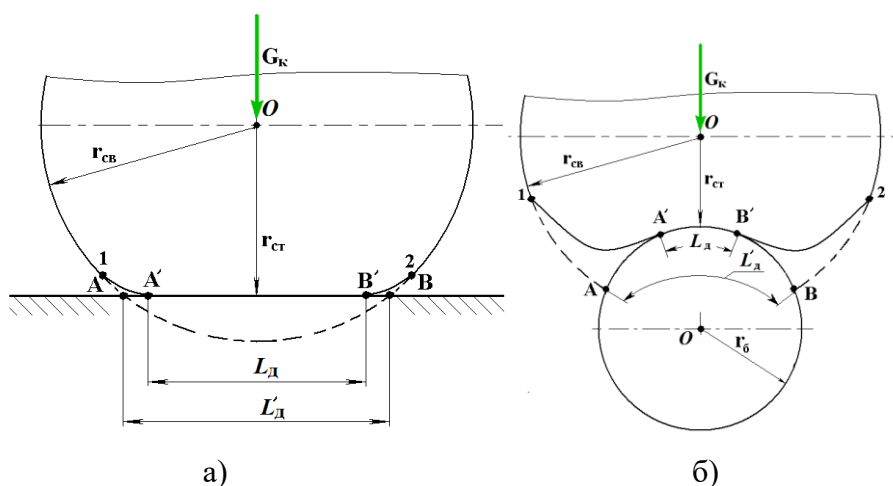
В дорожных условиях в ходе проведения испытаний шин возможно определить силовые показатели взаимодействия колеса и ОП, характеристики сопротивления качению, бокового увода, влияния параметров шин на эксплуатационные показатели автомобиля, надежность колесного движителя в условиях, характерных для условий эксплуатации [19].

Для упрощения модели нагружения колеса при его качении по барабану испытательного стенда в условиях лабораторно-стендовых испытаний примем, что деформация шины в зоне статической нагрузки и разгрузки имеет некоторый радиус (рис. 7). При этом следует учитывать значительный разброс величины этого радиуса, зависящего от соотношения радиусов барабана и колеса, что иллюстрирует рис. 8 [20].



R_m – радиус недеформированного профиля колеса, мм; R – реакция от барабана, мм;
 G – нагрузка на колесо, Н; R_δ – радиус барабана, мм

Рисунок 7 – Деформация шины при статической нагрузке на барабане радиуса R_δ



а) на дороге; б) на беговом барабане;

G_k – нагрузка на колесо, Н; $r_{св}$ – свободный радиус колеса, мм; $r_{ст}$ – статический радиус колеса, мм;
 r_δ – радиус барабана, мм; L_d – длина контакта с ОП, мм; L'_d – геометрическая длина контакта;
 А, Б, А', Б' – точки контакта колеса с ОП

Рисунок 8 – Схема деформации шины неподвижного колеса

Из анализа рис. 8 очевидно, что существует различие между геометрической длиной области контакта с ОП и ее фактической длиной. Это явление может быть обусловлено наличием в области контакта шины с ОП сил трения, препятствующих смещению поверхностного слоя по внешнему направлению. Но если при нагружении и качении шины по горизонтальной ОП отличие в длине области контакта не столь значительно, то при качении шины по барабану испытательного стенда к существенному различию в длине области контакта добавляется отрицательная кривизна прогиба шины в области контакта и значительно меньшие радиусы изгиба шины при входе и выходе испытуемого колеса из области контакта с беговой дорожкой барабана испытательного стенда.

Область контакта пневматической шины и недеформируемой ОП имеет форму эллипса и вытянуто в продольном направлении, а на ролике барабанного стенда – в поперечном направлении. При этом расхождения в площади области контакта шины с ОП и с беговым барабаном будут зависеть от геометрических размеров и числа контактных роликов. При контакте шины с двумя роликами стенда погрешность будет меньше, чем при контакте с шины одним роликом.

Барабанные многоосные стенды позволяют проводить испытания транспортных средств с режимами нагружения колесного движителя, близкими к реальным [21]. В то же время, подобные стенды могут сохранять все недостатки и особенности специфической деформации шины при качении колеса по барабану стенда, т.к. диаметр барабанов стенда может быть соизмерим с диаметром колеса транспортного средства (рис. 9).



Рисунок 9 – Общий вид барабанного испытательного стенда

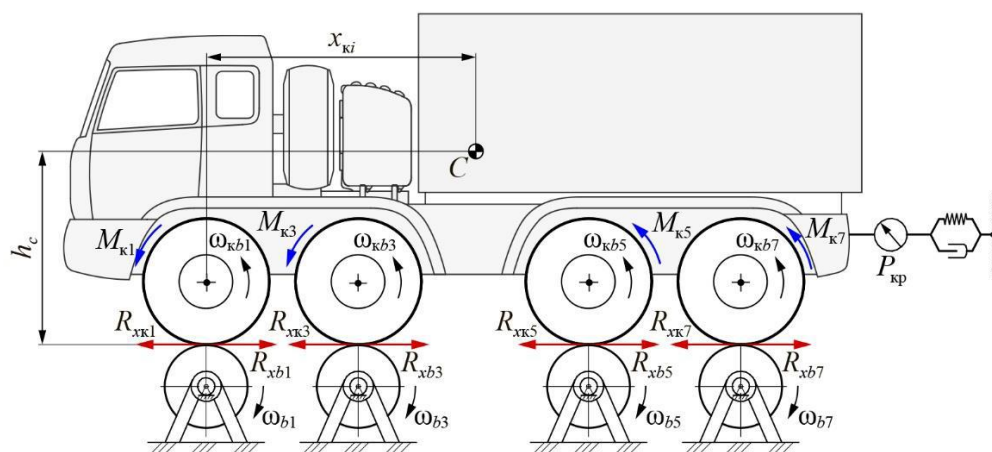
Использование современных многоточечных синхронизированных систем измерения позволяет проводить качественные динамические исследования в различных условиях и режимах нагружения (рис. 10).

При испытаниях необходимо учитывать, что в процессе проведения исследований взаимодействие колеса с пневматической шиной и металлическим цилиндрическим барабаном будет происходить при возрастающем ее скольжении по поверхности барабана в промежутке 0-100 % [22].

Автор в работе [23] предположил, что качение цилиндрической модели шины по цилиндрическому барабану сопровождается распределением нормальных и касательных напряжений, определяемых режимом качения и геометрией поверхностей (рис. 11). Так, нормальные напряжения в вертикальном и боковом направлениях (σ_z и σ_y) имеют максимальные значения в точке над осью вращения. Величины касательных напряжений (σ_x) будут определяться изменением геометрии шины в области контакта от круговой к плоской поверхности и сцеплением поверхностного слоя беговой дорожки шины с ОП. Соответственно, в области контакта появятся слои с зонами буксования и юза, имеющие разные направления поверхностных касательных напряжений.

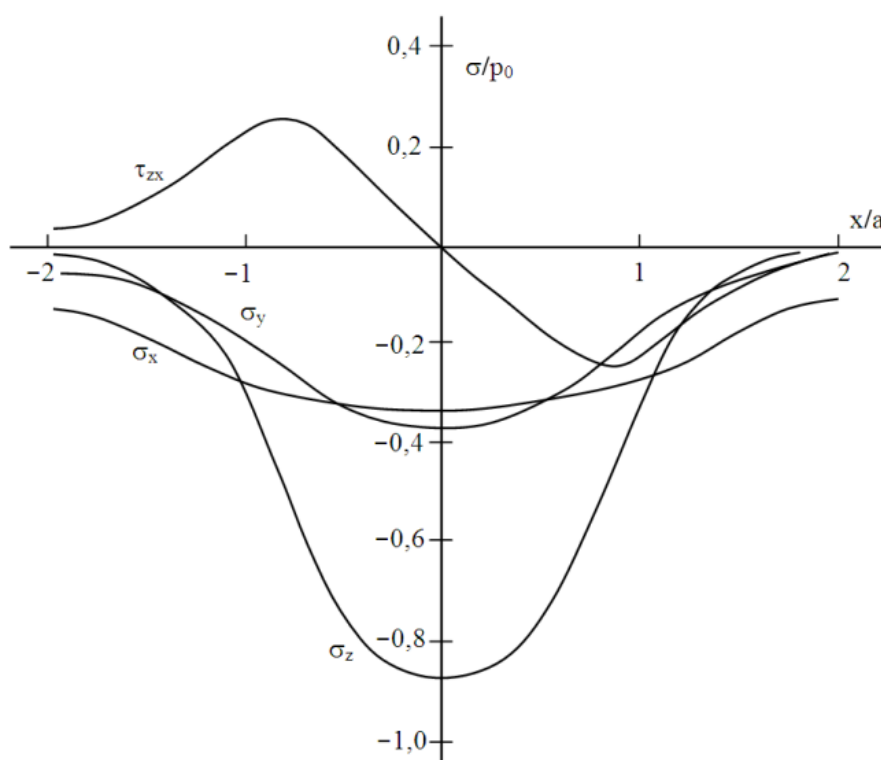
Рассматривая реальные процессы, возникающие при контакте колеса (как жесткого, так и деформируемого объекта) можно наблюдать деформацию ОП как в вертикальном, так и в горизонтальном направлении (рис. 12, а) [24]. Следовательно, перед катящимся колесом возможно возникновение зоны выдавливания верхнего слоя ОП с увеличением силы сопротивления качению (рис. 12, б).

На рис. 13, а представлены кривые изменения напряжений σ_x , σ_z и τ_1 по глубине поверхности контакта, а на рис. 13, б – линии уровня максимального касательного напряжения τ_1 [24]. Из анализа рисунка видно, что касательные напряжения в области контакта двух цилиндров достигают максимального значения ближе к центру области контакта. Нормальные напряжения по вертикальной и горизонтальной оси по длине контакта уменьшаются. Однако, нормальные напряжения по оси x увеличиваются более интенсивно.



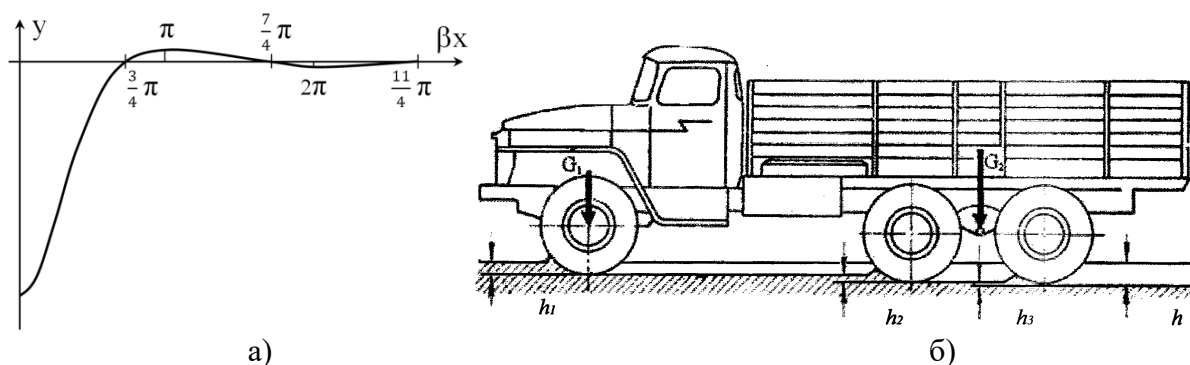
M_{ki} – крутящий (приводной) момент на i -ом колесе, Н·м; R_{xki} – продольная реакция i -го колеса при взаимодействии с поверхностью i -го барабана, Н; R_{xbi} – продольная реакция на поверхности i -го барабана при взаимодействии с i -ым колесом, Н; $P_{кр}$ – сила на крюке, Н; ω_{kbi} – угловая скорость i -го колеса, рад/с; ω_{bi} – угловая скорость i -го барабана, рад/с; x_{ki} – расстояние от центра тяжести до оси i -го колеса, м; h_c – высота центра тяжести от плоскости контакта, м

Рисунок 10 – Расчетная схема динамики колесного движителя на барабанном стенде (нечетная сторона)



сплошные линии – упругие напряжения на глубине $z = 0,5a$; a – длина зоны контакта, мм;
 p_0 – среднее нормальное напряжение по области контакта, Па

Рисунок 11 – Контакт качения упругопластических цилиндров



β_x – угол поворота колеса; h_1, h_2, h_3 – величина деформации ОП; G_1, G_2 – нагрузка на оси

Рисунок 12 – Деформация упругой опорной поверхности при вертикальном контакте с колесом

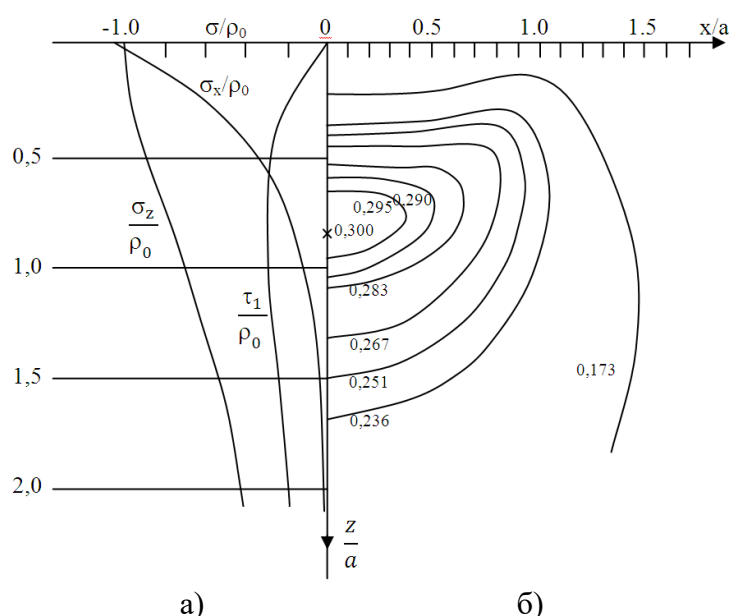
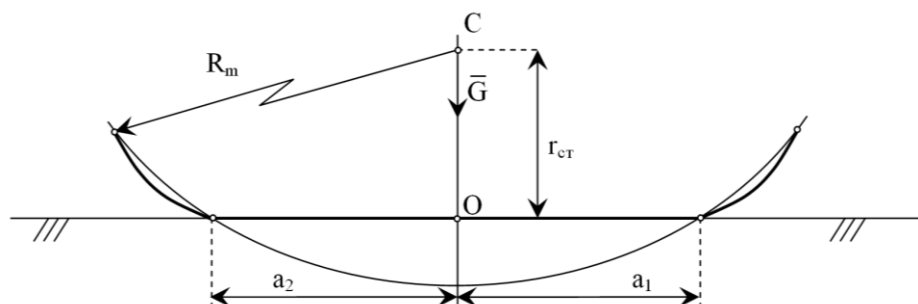


Рисунок 13 – Контакт цилиндров и распределение напряжений вдоль оси z (а) и линии уровня максимального касательного напряжения τ (б)

При статическом нагружении шины на горизонтальной и недеформируемой опорной поверхности ($R = \infty$) зоны загрузки по вертикальной оси одинаковы и определяются силами трения и коэффициентом сцепления по области контакта от его центра к его краям (рис. 14).



R_m – радиус колеса перед зоной деформации; a_1, a_2 – полудлина зоны контакта

Рисунок 14 – Деформация шины при статичной нагрузке на недеформируемой поверхности ($R = \infty$)

Н) и статический прогиб ($f_{ш}$, м), который в нормальных условиях может быть только положительным, определяя односторонний характер работы шины. В первом приближении в работе [26] предложена для этого использовать формулу Р. Хедекеля:

$$f_{ш} = Q \frac{1}{\pi p_{ш} \sqrt{2RD}}, \quad (1)$$

где $p_{ш}$ – давление воздуха в шине, Па; R – радиус кривизны протектора, м; D – наружный диаметр шины, м.

Однако формула (1) была получена в предположении, что шина деформируется только в области ее контакта с недеформируемой ОП, а давление в области контакта одинаково с давлением воздуха в шине. В то же время, Бидерман В. Л. предложил статический прогиб шины определять по формуле (2), которая наиболее полно отражает ее нагрузочные характеристики:

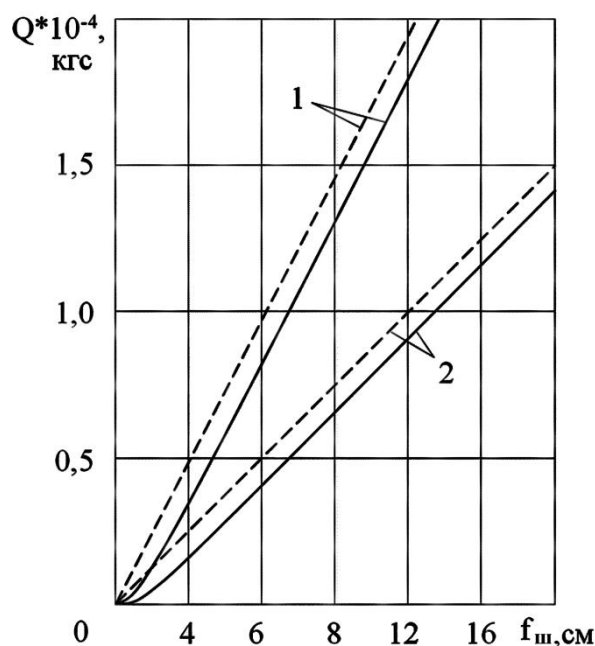
$$f_{ш} = \frac{C_2 Q}{2p_{ш}} + \sqrt{\left(\frac{C_2 Q}{2p_{ш}}\right)^2 + C_1 Q}, \quad (2)$$

где

$$C_1 = \frac{\varphi}{E} \frac{h_{ш}}{\pi \sqrt{2RD}}, \quad C_2 = \frac{1}{r \pi \sqrt{2RD}}, \quad (3, 4)$$

где C_1 , C_2 – коэффициенты, учитывающие геометрические и прочностные характеристики материала шин; φ – безразмерный коэффициент, характеризующий рисунок протектора шины; E – модуль упругости шины, Па; $h_{ш}$ – толщина протектора шины, м; r – отношение изменения объема шины к объему эллиптического сегмента деформации.

На рис. 17 показаны упругие характеристики пневматической шины, имеющие линейную зависимость, определенные по формулам Хедекеля и Бидермана.



1 – давление 4 бар; 2 – давление 2 бар;
сплошные линии – вычисления по формуле Хедекеля;
пунктирные линии – вычисления по формуле Бидермана

Рисунок 17 – Упругие характеристики шины в зависимости от внутреннего давления

Из анализа графика (рис. 17) очевидно, что упругие характеристики шин, вычисленные по формулам (1) и (2) носят линейный характер. Однако, при проведении аналитических расчетов по определению жесткости шин необходимо учитывать, что крупногабаритные шины имеют уникальную конструкцию и изучать их характеристики зачастую бывает очень затруднительно. А в реальных условиях эксплуатации транспортных средств происходит одновременная деформация протектора шины и ее каркаса, причем зависимость прогиба профиля шины от действующей на нее нагрузки не будет являться линейной функцией внутреннего давления воздуха и действующей на нее внешней нагрузки [25]. Таким образом, основным недостатком барабанных стендов заключается в отличие механики взаимодействия колеса с роликами стенда, которая существенно отличается от механики взаимодействия колеса с ОП. Поэтому, для анализа результатов испытаний транспортного средства на барабанных стендах необходимо применять различные поправочные коэффициенты. При этом отсутствуют закономерности изменения тяговых усилий при проведении испытаний на барабанных стендах, которые и определяют характер движения транспортного средства. Барабанные испытательные стенды применяются в основном на заводах изготовителях пневматических шин для определения их относительной долговечности (больше-меньше), при этом ошибка в определении нормы наработки может быть 3-5-кратной.

3 Обобщение результатов исследований

Колесный движитель транспортных средств при качении по ОП зачастую испытывает значительные внешние горизонтальные, вертикальные и боковые нагрузки, одновременно циклично и комплексно действующие на пневматические шины, а также многократные сложные деформации. При этом работа шин в сложных и жестких условиях способствует их ускоренному износу и разрушению каркаса. А корректное и точное аналитическое вычисление возникающих напряжений представляет собой очень сложную научную задачу, имеющую большое практическое значение.

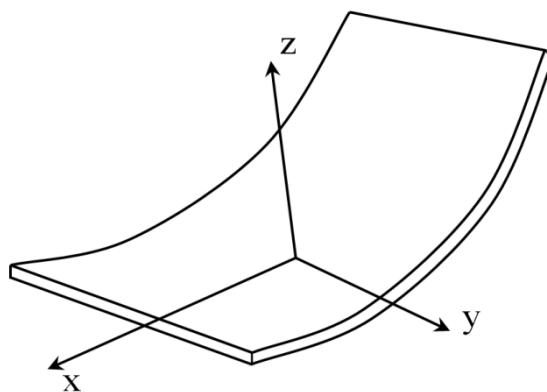
Даже, если все свести к системе дифференциальных уравнений в частных производных, то граничные условия необходимо будет ставить на заранее неизвестных поверхностях, что сразу делает невозможным применение традиционных методов решения задачи. Авторы статьи предлагают применить в данном вопросе подходы, близкие к науке «сопротивление материалов». Такая методика требует привлечения положений из теории упругости, и использования частных производных второго порядка при анализе связи напряжения – деформации. При этом необходимо учитывать, что, в отличие от стальных конструкций, деформации шин считать малыми, а уравнения линейными некорректно. Каучук и резина обладают значительной эластичностью по сравнению со сталью, и, соответственно, имеют под нагрузкой значительные сложные деформации. Однако, предположим, что под нагрузкой резина материала пневматической шины обладает малой деформацией на основании принципа Сен-Венана (строго не доказанного, но и не имеющего экспериментальных данных, ему противоречащих). Будем считать линейным изменение смещений точек протектора шины по толщине самого протектора (высоте профиля шины).

Принимаем, что пневматическая шина состоит из элементов с торообразными поверхностями постоянной кривизны, с достаточно тонким каркасом (рис. 18). При подаче в шину воздуха под давлением в ней возникнут усилия:

$$T_{\phi} = pR, \quad (5)$$

$$T_{\psi} = pr, \quad (6)$$

где T_{ϕ} и T_{ψ} – усилия, возникающие в торе вдоль большой и малой окружностей, Н; R – большой радиус тора, мм; r – малый радиус тора, мм. ; p – линейное внутреннее давление воздуха в шине, Н/мм.



x – продольные (по направлению качения) координаты элемента шины;
 y – поперечные (боковые) координаты элемента шины;
 z – (вертикальные) координаты элемента шины в направлении центра колеса

Рисунок 18 – Элемент торообразной поверхности шины

Запишем уравнения тора с параметрами φ и ψ в параметрической форме:

$$x(\varphi, \psi) = (R + z \cos \psi) \cos \varphi, \quad (7)$$

$$y(\varphi, \psi) = z \sin \psi, \quad (8)$$

$$z(\varphi, \psi) = R + z - (R + z \cos \psi) \sin \varphi. \quad (9)$$

Если произошла деформация шины, то границы области контакта с ОП при $z = \text{const}$ будут определяться уравнениями, которые представляют собой уравнения плоской кривой (в плоскости x и y), а при $z = \text{const}$ будут определять максимальную величину деформации шины:

$$x = (R + r \cos \psi) \cos \varphi, \quad (10)$$

$$y = z \sin \psi, \quad (11)$$

$$R + z - (R + z \cos \psi) \sin \varphi = \text{const}. \quad (12)$$

Графически однопараметрическую кривую можно представить так, как показано на рис. 19. При этом направление x показывает направление проскальзывания поверхности протектора шины при ее качении.

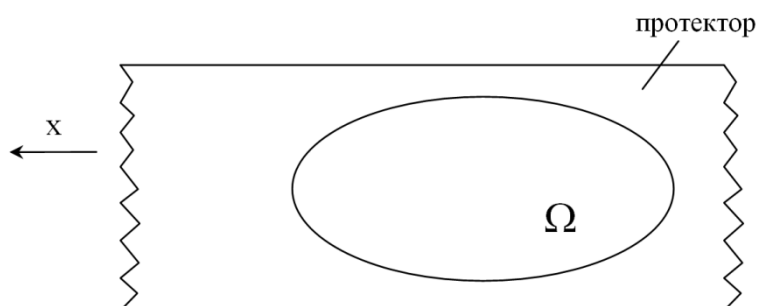


Рисунок 19 – Графическая однопараметрическая кривая

Уравнение равновесия в проекции на ось z будет иметь вид:

$$Q = \iint_{\Omega} N d\varphi d\psi, \quad (13)$$

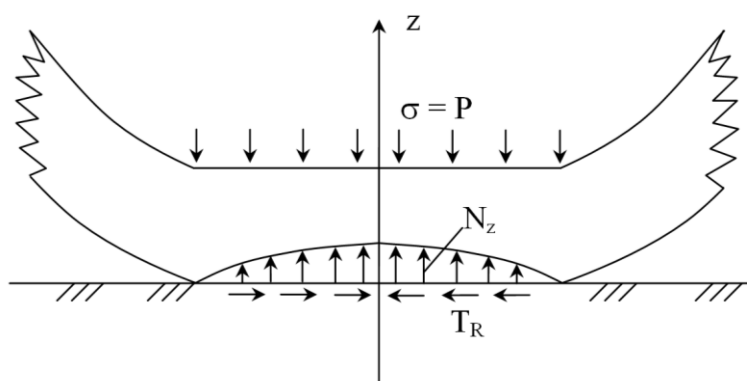
где Q – часть веса автомобиля, приходящаяся на одно колесо; $N(\varphi, \psi)$ – реакция ОП на единицу площади области контакта; Ω – граница области контакта.

Предположим, что:

$$N_z(\varphi, \psi) = E z(\varphi, \psi), \quad (14)$$

где E – модуль упругости, МПа; z – вертикальная деформация протектора шины, мм.

На рис. 20 показана вертикальная деформация протектора шины (вид сбоку).



N_z – нормальная реакция опорной поверхности; T_R – сила трения в зоне контакта;
 σ – давление воздуха в шине

Рисунок 20 – Вертикальная деформация протектора шины

Так как имеется равенство $N = N(x, y)$, то для линейных сдвиговых напряжений можно записать по соответствующим осям:

$$F_x = E_{ед} \frac{dN}{dx}, \quad (15)$$

$$F_y = E_{ед} \frac{dN}{dy}, \quad (16)$$

где $E_{ед}$ – безразмерный коэффициент осевого модуля упругости при сдвиге.

Аналогичная картина наблюдается для проекции (y, z) . При качении колеса возникают силы трения, которые можно описать классической формулой:

$$T_R = kN, \quad (17)$$

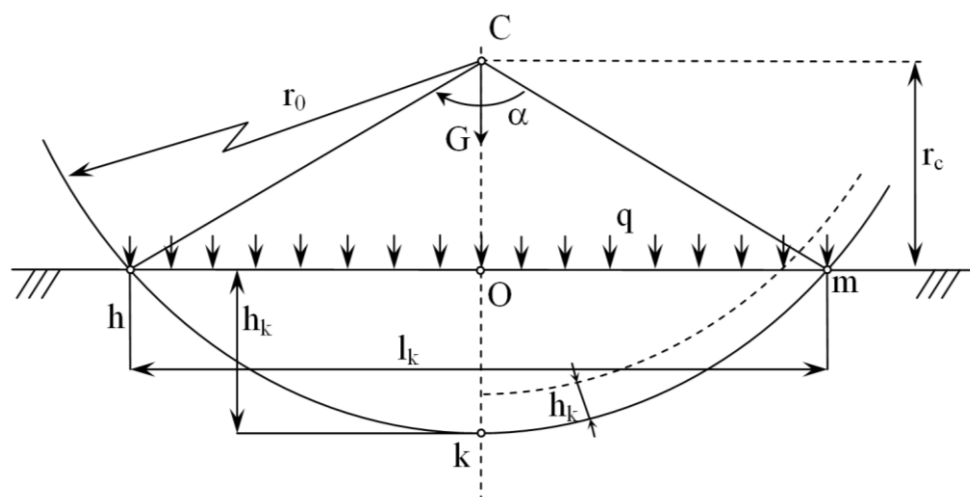
где k – коэффициент трения.

Общую (суммарную) силу трения можно вычислить по формуле:

$$\int T_R d\psi d\varphi = k \int_{\Omega} N d\varphi d\psi = kQ \quad (18)$$

Если следовать предложенному выше методу, то решение задачи по определению напряжений в области контакта можно получить как в численном виде, так и графически, используя, например, компьютерные программы, с помощью которых возможно построить графики при конкретно заданных параметрах пневматических шин (радиусов, толщины боковин, модуля упругости и др.).

Для решения приближенной модели взаимодействия рассмотрим нагружение шины при качении в свободном режиме по недеформируемой ОП или при статическом неподвижном нагружении силой G (рис. 21).



q — давление воздуха в шине, МПа; l_k — длина контакта, мм; h_k — величина деформации шины, мм;
 α — угол контакта, град; h, m — точки границы контакта

Рисунок 21 — Схема нагружения шины при качении в свободном режиме

Под действием этой силы происходит деформация шины на величину h_k и свободный радиус колеса r_o уменьшается до радиуса r_c . Эти данные являются стандартными и предоставляются заводами изготовителями пневматических шин. А расчет взаимодействия колеса с беговым барабаном испытательного стенда в данной статье будет рассматриваться как приближенный. Зная величины нагрузки и деформации возможно определить общую жесткость пневматической шины (модуль упругости):

$$E_{ш} = G/h_k. \quad (19)$$

Однако пневматическая шина представляет собой сложный объект и ее сопротивление нагружению будет состоять из нескольких составляющих:

$$G = S_k q + P_{деф}, \quad (20)$$

где $S_k = B \times l_k$ — площадь области контакта; l_k — длина области контакта, мм; B — ширина протектора, мм; q — величина внутреннего давления воздуха, Па; $P_{деф}$ — сила от деформации (изгиба) брекера, Н.

Длина области контакта беговой дорожки шины и ОП может быть определена как длина хорды по формуле (21):

$$l_k = 2r_o \sin \alpha/2. \quad (21)$$

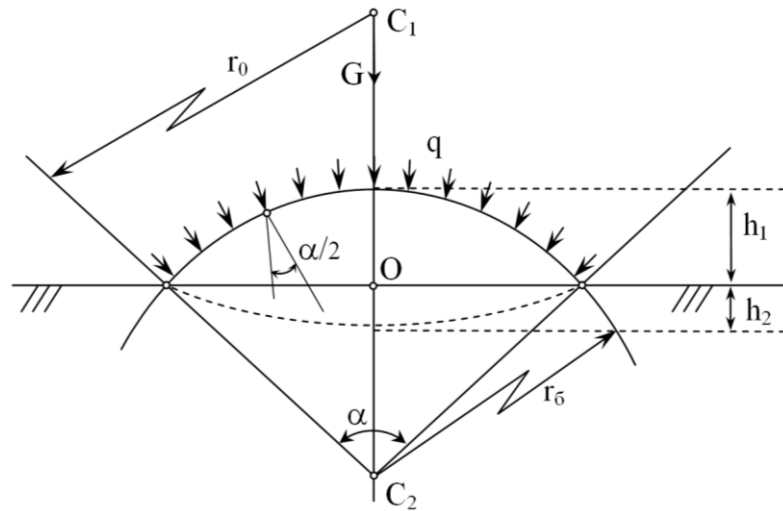
Величину угла α или $\alpha/2$ можно определить по формуле:

$$\cos \alpha/2 = r_c/r_o . \quad (22)$$

Тогда $\alpha/2 = \arccos(r_c/r_o)$. Следовательно, возможно выделить величину силы определяющей деформацией только слоя брекер – протектор:

$$P_{\text{деф}} = G - S_k q = G - Bl_k q. \quad (23)$$

При качении пневматической шины по барабану испытательного стенда получается более сложная картина, т.к. деформация шины имеет большую величину при отрицательной кривизне беговой дорожки (рис. 22).



h_1, h_2 – деформация шины от геометрии барабана и внешней нагрузки

Рисунок 22 – Схема качения пневматической шины по барабану стенда

Следует учитывать особенность внутреннего давления воздуха в шине как давления газа на поверхность, которое всегда будет направлено перпендикулярно к касательной в каждой точке поверхности. Следовательно, нормальное давление воздуха в шине (q) будет направлено по выпуклой поверхности, и, за счет действия под некоторым углом, будет меньшей величины, чем при действии по прямолинейной плоскости. Данное уменьшение силы может компенсироваться большей силой от прогиба протектора. Сила давления газа на выпуклую поверхность будет определяться как интеграл по углу контакта шины по поверхности барабана испытательного стенда. Однако длина площади контакта в данном случае будет являться дугой по соответствующему углу:

$$l_k = \frac{\pi R_6}{180^\circ} \alpha^\circ. \quad (24)$$

Тогда запишем формулу для определения силы, действующей на поверхность:

$$P = S_k^1 \int_0^\alpha q \cos \alpha d\alpha = qBl_k \sin a = q \frac{\pi BR_6}{180^\circ} \alpha^\circ \sin \alpha^\circ. \quad (25)$$

В общем случае, величина этой силы может быть известна, но, величина α остается неизвестной. Данное уравнение может быть решено приближенно с учетом малой деформации шины при $\sin \alpha \approx \alpha$, тогда запишем:

$$\alpha = \sqrt{\frac{180P}{q\pi BR_0}}. \quad (26)$$

Полученное значение угла позволит более корректно разделить силу деформации и силу от давления воздуха в шине исходя из условия, что:

$$E_{ш} = P / h_{ш}. \quad (27)$$

Тогда давление от изгиба, при деформации на барабане будет определяться прогибом колеса от собственного радиуса и по барабану. Соответственно, наличие отрицательного прогиба будет уменьшать значимость силы от внутреннего давления, и увеличивать значимость силы от изгиба. В то же время столь значительные деформации поверхностного слоя шины (протектор + корд) требуют учета многослойности шины т.к. слои корда так таковые не растягиваются, а деформация будет определяться растяжением со сдвигом слоев резины между слоями корда, что, в свою очередь, будет резко увеличивать процесс разрушения и расслоения шины от увеличения внутренних нормальных и касательных напряжений и напряжений между слоями корда.

4 Формулирование научно-технического проблемного вопроса дальнейших исследований (проблемы), концепции и задачи исследования

Таким образом, совершенствование конструкции транспортных средств, увеличение их грузоподъемности и скоростей, и нагрузки на колесный движитель потребует разработки пневматических шин, приспособленных к изменяющимся условиям эксплуатации. Соответственно, потребуются уточненные модели нагружения пневматических шин, учитывающие их многослойность, различие механических и прочностных свойств отдельных слоев, в том числе и при многоцикловых нагрузках, кривизну поверхностей деформируемых слоев. Для проверки разработанных моделей и конструкций соответственно потребуется разработка методик испытаний и новые конструкции стендов для проведения испытаний пневматических шин. При этом, полученные результаты должны коррелироваться с данными реальной эксплуатации транспортных средств. На основании вышеизложенного, можно сформулировать несколько приоритетных направлений по созданию новых моделей пневматических шин и проведения их испытаний на стендах с беговыми барабанами:

- создание математических моделей, учитывающих многослойность шин и их начальную конструктивную кривизну;
- усовершенствование существующих испытательных стендов (с движущейся прямолинейно опорной поверхностью) а также создание испытательных стендов с прямолинейными беговыми поверхностями с имитацией различных поверхностей качения;
- создание высокоточных многоточечных систем измерения с синхронным считыванием данных для определения нормальных и касательных напряжений и деформаций по всем направлениям деформации шин.

Учитывая сложность и взаимозависимость процессов, происходящих при взаимодействии пневматических шин и ОП, а также значительные величины их деформаций и возникающих внутренних напряжений, необходимо более подробно исследовать процессы деформации и нагружения шин при их испытаниях на стендах с беговыми барабанами с целью приближения условий испытаний к реальным эксплуатационным условиям для получения корректных и адекватных результатов.

Список литературы

- 1 Петров, М.А. Работа автомобильного колеса в тормозном режиме / М.А. Петров. – Омск.: Зап. – Сиб. книжное издательство, 1973. – 224 с.
- 2 Майборода О.В. Основы управления автомобилем и безопасность дорожного движения / О.В. Майборода. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 256 с.
- 3 Лаврентьев В.Б. В помощь строителям БАМ. Вождение автомобилей высокой проходимости / В.Б. Лаврентьев. – М.: Транспорт, 1974. – 92 с.
- 4 Ковальчук, В.П. Эксплуатация и ремонт автомобильных шин / В.П. Ковальчук. – М.: Транспорт, 1972. – 256 с.
- 5 Бидерман В.Л., Гуслицер Р.Л., Захаров С.П. и др. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытания, эксплуатация) / В.Л. Бидерман, Р.Л. Гуслицер, С.П. Захаров и др. – М.: ГНТИ Химической литературы, 1963. – 384 с.
- 6 Третьяков, О.Б. Автомобильные шины. Конструкция, механика, свойства, эксплуатация / О.Б. Третьяков, В.А. Гудков, А.А. Вольнов, В.Н. Тарновский. – М.: Колос С, Химия, 2007. – 432 с.
- 7 Ларин В.В. Теория движения полноприводных колесных машин / В.В. Ларин. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020. – 391 с.
- 8 Ларин В.В. Зависимости вертикальной деформации пневматических шин // Инженерный журнал: наука и инновации. Вып. 12. 2013 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL:<http://engjournal.ru/catalog/machin/transport/1032.html>. (дата обращения 25. 08.2025).
- 9 Петров М.А. Работа автомобильного колеса в тормозном режиме / М.А. Петров. – Западно – Сибирское книжное издательство. Омское отделение, 1973. – 224 с.
- 10 Резниковский М.М., Лукомская А.И. Механические испытания каучука и резины / М.М. Резниковский, А.И. Лукомская. – М.: Химия, 1968. – 242 с.
- 11 Крагельский И. В. Трение и износ / И.В. Крагельский. – М.: Машиностроение, 1968. – 481 с.
- 12 Боуден Ф. П., Тейбор Д. Трение и смазка твердых тел / Ф.П. Боуден, Д. Тейбор. – М.: Машиностроение, 1968. – 544 с.
- 13 Бартенев Г. М., Елькин А. И. О механизме трения высокоэластичных материалов при высоких и низких температурах / Г.М. Бартенев, А.И. Елькин // Сборник «Теория трения и износа». М.: Наука, 1965. – С. 57 – 59.
- 14 Kummer IT. W. and Mayer W. E. Skid or slip Resistance Journal of Materials, Vol № 3, 1966. „Schallamach A. Chemistry and Physics of Rubberlike Substances. Cn. 13,1963, P. 355—416.
- 15 Дерягин, Б. В. Что такое трение? / Б.В. Дерягин. – М. – Изд. АН СССР, 1963. – 230 с.
- 16 Петров М. А. Исследование торможения автомобиля и работы пневматических шин / М.А. Петров. – Западно-Сибирское книжное издательство, Омск, 1970. – 158 с.
- 17 Келдыш М.В. Шимми переднего колеса шасси самолета / М.В. Келдыш. –Труды ЦАГИ, Изд. Бюро новой техники НКАП, № 564, 1945. – 34 с.
- 18 Левин М.А., Фуфаев Н.А. Теория качения деформируемого колеса / М.А. Левин, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука, 1989. – 272 с.
- 19 Балабин И.В. и др. Испытания автомобилей / И.В. Балабин, Б.А. Куров, С.А. Лаптев. – М.: Машиностроение, 1988. – 192 с.
- 20 Бойко А.В., Распопина В.Б. Математическая модель для расчета коэффициента сцепления от проскальзывания с использованием нормальных и касательных распределенных нагрузок по длине пятна контакта эластичной шины с дорогой и беговым барабаном диагностического стенда / А.В. Бойко, В.Б. Распопина // Вестник ИрГТУ, 2014. – № 10 (93). – С. 168 – 172.
- 21 Захаров, А.Ю. Технология экспериментальных исследований колесных транспортных средств на стендах с имитацией качения движителей по опорной поверхности. Дис... канд. техн. наук: 05.05.03 / А.Ю. Захаров – Москва, 2016. – 171 с.
- 22 Бойко А.В., Распопина В.Б. Датчик для измерения нормальных и продольных касательных реакций, распределенных по длине пятна контакта при взаимодействии колеса с эластичной шиной с цилиндрической опорной поверхностью / А.В. Бойко, В.Б. Распопина // Сборник научных трудов по материалам МНПК «Закономерности развития, современного естествознания, техники и технологий», Белгород: ООО Агентство перспективных научных исследований (АПНИ), 2018. – 204 с.
- 23 Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.

24 Беляев Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1965. – 856 с.

25 Малиновский Е.Ю., Гайцгорн М.М. Динамика самоходных машин с шарнирной рамой / Е.Ю. Малиновский, М.М. Гайцгорн. – М.: Машиностроение, 1974. – 176 с.

26 Литвинов А.С. Управляемость и устойчивость автомобиля / А.С. Литвинов. – М.: Машиностроение, 1971. – 415 с.

References

1 Petrov, M.A. The operation of a car wheel in the braking mode / M.A. Petrov. – Omsk: Zap. – Sib. book publishing house, 1973. – 224 p.

2 Mayboroda, O.V. Fundamentals of Car Driving and Road Safety / O.V. Mayboroda. – M.: Publishing Center "Academy", 2007. – 256 p.

3 Lavrentiev V.B. In the Aid of the BAM Builders. Driving High-Terrain Vehicles / V.B. Lavrentiev. – M.: Transport, 1974. – 92p.

4 Kovalchuk V.P. Operation and Repair of Automobile Tires / V.P. Kovalchuk. – 256p.– M.: Transport, 1972.

5 Biderman V.L., Guslitzer R.L., Zakharov S.P. et al. Automobile Tires (Design, Calculation, Testing, Operation) / V.L. Biderman, R.L. Guslitzer, S.P. Zakharov et al. – M.: GNTI of Chemical Literature, 1963.– 384 p.

6 Tretyakov O.B. et al. Automobile Tires. Design, Mechanics, Properties, and Operation / O.B. Tretyakov, V.A. Gudkov, A.A. Volnov, and V.N. Tarnovsky. Moscow: KolosS, Chemistry, 2007. – 432 p.

7 Larin V.V. Theory of motion of four-wheel drive wheeled vehicles / V.V. Larin. M.: Publishing House of Bauman Moscow State Technical University, 2020. – 391 p.

8 Larin V.V. Dependence of vertical deformation of pneumatic tires // Engineering Journal: Science and Innovation. Issue. 12. 2013 [Electronic Access mode:–resource]. URL:<http://engjournal.ru/catalog/machin/transport/1032.html>. (accessed on 25.08.2025).

9 Petrov, M.A. The operation of a car wheel in braking mode / M.A. Petrov. – West Siberian Book Publishing House. Omsk branch, 1973. – 224 p.

10 Reznikovskiy, M.M., Lukomskaya, / M.M. Reznikovskiy, A.I. Lukomskaya. – Mechanical Testing of Rubber and Elastomers. M.: Khimiya, 1968. – 242 p.

11 Kragelsky I. V. Friction and Wear / I.V. Kragelsky. – M.: Mechanical Engineering, 1968. – 481 p.

12 Bowden F. P., Taybor D. Friction and Lubrication of Solids / F.P. Bowden, D. Taybor. M.: Mechanical Engineering, 1968. –544p.

13 Bartenev, G. M., Yelkin, A. I. On the Friction Mechanism of Highly Elastic Materials at High and Low Temperatures / G. M. Bartenev, A. I. Yelkin // In The Theory of Friction and Wear, M.: Nauka. 1965. – P. 57 – 59.

14 Kummer IT. VV. and Mayer W. E. Skid or slip Resistance Journal of Materials, Vol № 3, 1966. Schallamach A. Chemistry and Physics of Rubberlike Substances. Cn. 13, 1963, P. 355 – 416.

15 Deryagin B. V. What is Friction? / B.V. Deryagin – M. : Publishing House of the USSR Academy of Sciences. 1963. – 230 p.

16 Petrov M. A. Research on Car Braking and Pneumatic Tire Operation / M.A. Petrov. – West Siberian Book Publishing House, Omsk, 1970. –158 p.

17 Keldysh, M.V. Shimmie of the Front Wheel of an Aircraft's Chassis / M.V. Keldysh – Proceedings of TsAGI, Publishing House of the Bureau of New Technology of the NKAP, №. 564, 1945. – 34 p.

18 Levin, M.A., Fufaev, N.A. Theory of Rolling of a Deformable Wheel / M.A. Levin, N.A. Fufaev. – M.: Nauka, 1989. – 272 p.

19 Balabin I.V. et al. Testing of Cars / I.V. Balabin, B.A. Kurov, S.A. Laptev. – M.: Mechanical Engineering, 1988. – 192 p.

20 Boyko A.V., Raspopina V.B. Mathematical model for calculating the coefficient of adhesion from slipping using normal and tangential distributed loads along the length of the contact patch of an elastic tire with the road and the running drum of a diagnostic stand / A.V. Boyko, V.B. Raspopina // Bulletin of Irkutsk State Technical University, 2014. – No. 10 (93). – P. 168 – 172.

21 Zakharov, A.Yu. Technology of experimental studies of wheeled vehicles on stands with simulation of propulsion units rolling on the support surface. Dis... cand. tech. sciences: 05.05.03 / A.Yu. Zakharov – Moscow, 2016. – 171 p.

22 Boyko A.V., Raspopina V.B. Sensor for measuring normal and longitudinal tangential reactions distributed along the length of the contact spot during the interaction of a wheel with an elastic tire with a

cylindrical support surface / A.V. Boyko, V.B. Raspopina // Collection of scientific papers based on the materials of the MNPC "Patterns of development, modern natural science, engineering and technology", Belgorod: The Agency for Advanced Scientific Research (APNI), LLC, 2018. – 204 p.

23 Johnson, K. Mechanics of Contact Interaction / K. Johnson.– М.: Mir, 1989. –510 p.

24 Belyaev, N.M. Resistance of Materials / N.M. Belyaev.– М.: Nauka, 1965. – 856 p.

25 Malinovsky, E.Yu., and Gaitsgorn, M.M. Dynamics of Self-Propelled Machines with a Swivel Frame. – М.: Mashinostroenie, 1974. – 176 p.

26 Litvinov, A.S. Vehicle Handling and Stability / A.S. Litvinov.– М.: Mechanical Engineering, 1971. – 415 p.

© Гудков В. В., Сокол П. А., 2025