УДК 620.1 DOI: 10.34220/2311-8873-2020-3-3-81-93

ПОЛЯРНО-СИММЕТРИЧНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ТЕМПЕРАТУРНО-ВЛАЖНОСТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Огарков В.Б., Аксенов А.А., Малюков С.В.
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»
E-mail: mf@vglta.vrn.ru

Аннотация: Рассмотрена актуальная научно-техническая задача о полярно-симметричном деформировании упругого цилиндра в условиях температурно-влажностных воздействий. Получено точное аналитическое решение данной задачи с определением однозначных выражений для напряжений, деформаций и радиального перемещения. Полученное решение позволяет решить данную задачу для несжимаемого материала при $\mu = \frac{1}{2}$ как частный случай.

Ключевые слова: деформирование упругого цилиндра, несжимаемый материал, закон Гука.

POLAR-SYMMETRIC DEFORMATION OF AN ELASTIC CYLINDER UNDER TEMPERATURE-HUMIDITY EXPOSURE

Ogarkov V.B., Aksenov A.A., Malyukov S.V.
Federal State Budget Educational Institution of Higher Education «Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov»
E-mail: mf@vglta.vrn.ru

Summary: The actual scientific and technical problem of polar-symmetric deformation of an elastic cylinder under conditions of temperature and humidity influences is considered. An exact analytical solution to this problem is obtained with the determination of unambiguous expressions for stresses, deformations and radial displacement. The obtained solution allows solving this problem for an incompressible material with $\mu = 1/2$ as a special case.

Keywords: deformation of an elastic cylinder, incompressible material, Hooke's law.

Рассмотрим полярно-симметричное деформирование упругого изотропного цилиндра при тепловом стационарном воздействии. В данном случае система уравнений будет иметь вид [1, 3-5]:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}+\sigma_r-\sigma_\theta=0; \tag{1}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}\right)-r\frac{d\varepsilon_r}{dr}=0; \tag{2}$$

$$\varepsilon_r=\frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r}. \tag{3}$$

Обобщенный закон Гука в случае обобщенной плоской деформации при тепловом воздействии следует записать в следующем виде:

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E}[\sigma_r-\mu(\sigma_\theta+\sigma_z)]+\alpha T(r); \tag{4}$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{1}{E}[\sigma_\theta-\mu(\sigma_r+\sigma_z)]+\alpha T(r); \tag{5}$$

$$\varepsilon_z=const=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_r+\sigma_\theta)]+\alpha T(r). \tag{6}$$

Найдем стационарное температурное поле в длинном цилиндре при полярной симметрии. На внутренней поверхности цилиндра задается постоянная температура T_1, а на внешней поверхности цилиндра – T_2. Поперечное сечение цилиндра представлено на рисунке 1.

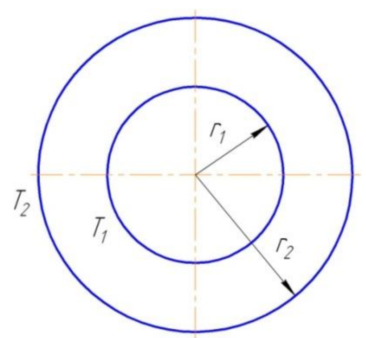

Рисунок 1 – Поперечное сечение цилиндра

При стационарном воздействии уравнение теплопроводности принимают следующий вид:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0. \tag{7}$$

$$\text{При } r = r_1: \quad T = T_1; \quad \text{при } r = r_2: \quad T = T_2. \tag{8}$$

При интегрировании уравнения (7) дважды по r, получим его общее решение:

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2. \tag{9}$$

Применяя граничные условия (8), найдем постоянные C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{(T_2 - T_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}; \quad C_2 = \frac{(T_1 \ln r_2 - T_2 \ln r_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \tag{10}$$

Подставляя найденные значения постоянных в общее решение (9), получим следующую формулу:

$$T = \frac{1}{e\frac{r_2}{r_1}}\left(T_1 \ln \frac{r_2}{r} - T_2 \ln \frac{r_1}{r}\right). \tag{11}$$

Обобщенный закон Гука запишем в следующей форме:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha C_1 \ln r + \alpha C_2; \tag{12}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha C_1 \ln r + \alpha C_2; \tag{13}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_\theta + \sigma_r)] + \alpha C_1 \ln r - \alpha C_2. \tag{14}$$

Из последнего соотношения получим:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z + \mu(\sigma_\theta + \sigma_r) - \alpha C_1 E \ln r - \alpha E C_2. \tag{15}$$

Подставим формулу (15) в уравнения (13) и (12):

$$\begin{gathered}\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \mu\sigma_r - \mu\{E\varepsilon_z + \mu(\sigma_\theta + \sigma_r) - \\ -\alpha C_1 E \ln r - \alpha E C_2\}] + \alpha C_1 \ln r + \alpha C_2;\end{gathered} \tag{16}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[(1-\mu^2)\sigma_\theta - \mu(1+\mu)\sigma_r] + (1+\mu)\alpha C_1 \ln r + (1+\mu)\alpha C_2; \tag{17}$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[(1-\mu^2)\sigma_r - \mu(1+\mu)\sigma_\theta] + (1+\mu)\alpha C_1 \ln r + (1+\mu)\alpha C_2; \tag{18}$$

$$\varepsilon_r = \frac{(1+\mu)}{E}[(1-\mu)\sigma_r - \mu\sigma_\theta] + (1+\mu)\alpha C_1 \ln r + (1+\mu)\alpha C_2; \tag{19}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{(1+\mu)}{E}[(1-\mu)\sigma_\theta - \mu\sigma_r] + (1+\mu)\alpha C_1 \ln r + (1+\mu)\alpha C_2. \quad (20)$$

Приведем решение данной задачи, полученное в учебнике [1, 6-10]:

$$u(r) = \frac{(1+\mu)}{(1-\mu)}\frac{\alpha}{r}\int_{r_1}^{r_2} T(r) r dr + A_1 r + \frac{A_2}{r}. \quad (21)$$

Найдем деформации по формулам Коши (3):

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{(1+\mu)}{(1-\mu)}\frac{\alpha}{r^2}\int_{r_1}^{r_2} Tr dr + A_1 + \frac{A_2}{r^2}; \quad (22)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{-(1+\mu)}{(1-\mu)}\frac{\alpha}{r^2}\int_{r_1}^{r_2} Tr dr + \frac{(1+\mu)}{(1-\mu)}\alpha T(r) + A_1 - \frac{A_2}{r^2}. \quad (23)$$

В учебнике [1, 11-16] рассмотрена плоская деформация при $\varepsilon_z = 0$. В этом случае условие несжимаемости принимает следующий вид:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 3\alpha T. \quad (24)$$

Сложим деформации (22) и (23):

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 2A_1 + \frac{(1+\mu)}{(1-\mu)}\alpha T(r). \quad (25)$$

Для несжимаемого материала:

$$\mu = \frac{1}{2}; \quad (26)$$

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 2A_1 + 3\alpha T. \quad (27)$$

В соответствии с формулой (24) необходимо положить:

$$A_1 = 0. \quad (28)$$

Выполнение равенства (28) просто невозможно, поскольку для упругого цилиндра необходимо выполнить следующие граничные условия, для реализации которых необходимо две независимые константы интегрирования:

$$\sigma_r(r = r_1) = 0; \quad \sigma_r(r = r_2) = 0. \quad (29)$$

Поэтому использование решения (21) для несжимаемого материала нежелательно.

Используем общий обобщенный закон Гука в условиях теплового воздействия [2, 17-22]:

$$\sigma_r = 2G\varepsilon_x + \lambda\ell - (3\lambda + 2G)\alpha T; \tag{30}$$

$$\sigma_\theta = 2G\varepsilon_\theta + \lambda\ell - (3\lambda + 2G)\alpha T; \tag{31}$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\ell - (3\lambda + 2G)\alpha T; \tag{32}$$

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \tag{33}$$

$$\ell = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0 \text{ (несжимаемый материал).}$$

При $\mu = \frac{1}{2}$ второе слагаемое в формулах (30)-(32) неопределимо, а третье слагаемое в этих формулах просто равно бесконечности, что противоречит физическому смыслу.

Таким образом, решение задачи о полярно-симметричном деформировании упругого цилиндра для сжимаемого и несжимаемого материала требует специального рассмотрения. При этом, решение данной задачи для несжимаемого материала должно с необходимостью получаться из общего решения для сжимаемого материала при $\mu = \frac{1}{2}$. Иначе будем иметь явное нарушение выполнения общего закона Гука.

Выпишем обобщенный закон Гука:

$$\varepsilon_r = \frac{(1+\mu)}{E}[(1-\mu)\sigma_r - \mu\sigma_\theta] + \alpha(1+\mu)C_1 \ln r + \alpha(1+\mu)C_2; \tag{34}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{(1+\mu)}{E}[(1-\mu)\sigma_\theta - \mu\sigma_r] + \alpha(1+\mu)C_1 \ln r + \alpha(1+\mu)C_2. \tag{35}$$

Решение данной задачи будем искать в следующем виде:

$$\sigma_r = \frac{A_1}{r^2} + A_2(1 + 2\ln r) + 2A_3; \tag{36}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{A_1}{r^2} + A_2(3 + 2\ln r) + 2A_3; \tag{37}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{B_1}{r^2} + B_2(1 + 2\ln r) + 2B_3; \tag{38}$$

$$\varepsilon_r = -\frac{B_1}{r^2} + B_2(3 + 2\ln r) + 2B_3. \tag{39}$$

В закон Гука (34)-(35) подставим формулы (36)-(39):

$$-\frac{B_1}{r^2}+B_2(3+2\ln r)+2B_3=\frac{(1+\mu)}{E}\left\{(1-\mu)\left[\frac{A_1}{r^2}+A_2(1+2\ln r)+A_3\right]-\right.$$
$$\left.-\mu\left[\frac{-A_1}{r^2}+A_2(3+2\ln r)+2A_3\right]\right\}+\alpha(1+\mu)C_1\ln r+\alpha(1+\mu)C_2; \quad (40)$$

$$\frac{B_1}{r^2}+B_2(1+2\ln r)+2B_3=\frac{(1+\mu)}{E}\left\{(1-\mu)\left[\frac{-A_1}{r^2}+A_2(3+2\ln r)+2A_3\right]-\right.$$
$$\left.-\mu\left[\frac{A_2}{r^2}+A_2(1+2\ln r)+2A_3\right]\right\}+\alpha(1+\mu)C_1\ln r+\alpha(1+\mu)C_2; \quad (41)$$

$$\frac{-B_1}{r^2}+3B_2+2B_3+2B_2\ln r=$$
$$=\frac{(1+\mu)}{E}\left\{\frac{A_1}{r^2}+(1-\mu)A_2+2(1-\mu)A_2+2(1-\mu)A_2\ln r+2(1-\mu)A_3-\right.$$
$$\left.-3\mu A_2-2\mu A_2\ln r-2\mu A_3\right\}+\alpha(1+\mu)C_1\ln r+\alpha(1+\mu)C_2; \quad (42)$$

$$\frac{B_1}{r^2}+B_2(1+2\ln r)+2B_3=\frac{(1+\mu)}{E}\left\{\frac{-A_1}{E}+3(1-\mu)A_2+\right.$$
$$+2(1-\mu)A_2\ln r+2(1-\mu)A_3-\mu A_2-2\mu A_2\ln r-$$
$$\left.-2\mu A_3\right\}+\alpha(1+\mu)C_1\ln r+\alpha(1+\mu)C_2; \quad (43)$$

$$\frac{-B_1}{r^2}+3B_2+2B_3+2B_2\ln r=\frac{(1+\mu)}{E}\left\{\frac{A_1}{r^2}+(1-4\mu)A_2+\right.$$
$$\left.+2(1-2\mu)A_2\ln r+2(1-2\mu)A_3\right\}+\alpha(1+\mu)C_1\ln r+\alpha(1+\mu)C_2; \quad (44)$$

$$\frac{B_1}{r^2}+B_2+2B_3+2B_2\ln r=\frac{(1+\mu)}{E}\left\{\frac{-A_1}{r^2}+3(1-\mu)A_2+\right.$$
$$\left.+2(1-2\mu)A_2\ln r+2(1-\mu)A_3-\mu A_2-2\mu\ln r-2\mu A_3\right\}+$$
$$+\alpha(1+\mu)C_1\ln r+\alpha(1+\mu)C_2. \quad (45)$$

В уравнениях (44) и (45) приравняем коэффициенты:

$$-B_1=\frac{(1+\mu)}{E}A_1; \quad (46)$$

$$2B_2=\frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_2+\alpha(1+\mu)C_1; \quad (47)$$

$$B_1=-\frac{(1+\mu)}{E}A_1; \quad (48)$$

$$2B_2=\frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_2+\alpha(1+\mu)C_1; \quad (49)$$

$$3B_2+2B_3=\frac{(1+\mu)}{E}\{(1-4\mu)A_2+2(1-2\mu)A_3\}+\alpha(1+\mu)C_2; \quad (50)$$

$$B_2 + 2B_3 = \frac{(1+\mu)}{E}\{(3-4\mu)A_2 + 2(1-2\mu)A_3\} + \alpha(1+\mu)C_2; \quad (51)$$

$$B_1 = -\frac{(1+\mu)}{E}A_1; \quad (52)$$

$$B_2 = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)A_2}{2E} + \frac{\alpha(1+\mu)C_1}{2}. \quad (53)$$

Вычтем из уравнения (50) соотношение (51):

$$2B_2 = -\frac{2(1+\mu)}{E}A_2; \quad B_2 = -\frac{(1+\mu)}{E}A_2. \quad (54)$$

Приравняем формулы (53) и (54):

$$\frac{(1+\mu)(1-2\mu)A_2}{2E} + \frac{\alpha(1+\mu)C_1}{2} = -\frac{(1+\mu)}{E}A_2; \quad (55)$$

$$\frac{(1+\mu)A_2}{E}\left[1 + \frac{(1-2\mu)}{2}\right] = \frac{-\alpha(1+\mu)C_1}{2}; \quad (56)$$

$$\frac{(1+\mu)(3-2\mu)A_2}{2E} = \frac{-\alpha(1+\mu)C_1}{2}; \quad (57)$$

$$A_2 = \frac{-\alpha E C_1}{(3-2\mu)}; \quad (58)$$

$$B_2 = -\frac{(1+\mu)}{E}A_2 = \frac{(1+\mu)}{E}\frac{\alpha E C_1}{(3-2\mu)}; \quad (59)$$

$$B_2 = \frac{\alpha(1+\mu)C_1}{(3-2\mu)}; \quad (60)$$

$$\varepsilon_\theta + \varepsilon_r = 4B_2 + 4B_2 \ln r + 4B_3. \quad (61)$$

В соответствии с соотношением (51):

$$2B_3 = -B_2 + \frac{(1+\mu)}{E}\{(3-4\mu)A_2 + 2(1-2\mu)A_3\} + \alpha(1+\mu)C_2. \quad (62)$$

Для несжимаемого материала:

$$\mu = \frac{1}{2}; \quad (63)$$

$$B_1 = -\frac{3A_1}{2E}; \quad (64)$$

$$B_2 = \frac{3}{4}\alpha C_1; \tag{65}$$

$$2B_3 = -\frac{3}{4}\alpha C_1 + \frac{3}{2}\frac{A_2}{E} + \frac{3\alpha C_2}{2}. \tag{66}$$

Для несжимаемого материала соотношение (61) пример вид:

$$\begin{gathered}\varepsilon_\theta + \varepsilon_r = 3\alpha C_1 - \frac{3\alpha C_1}{2} + \frac{3A_2}{E} + 3\alpha C_2 + \\ +3\alpha C_1 \ln r = 3\alpha C_1 - \frac{3\alpha C_1}{2} - \frac{3\alpha C_1}{2} + 3\alpha C_1 \ln r + \\ +3\alpha C_2 = 3\alpha C_1 \ln r + 3\alpha C_2.\end{gathered} \tag{67}$$

Сложим соотношения закона Гука (34) и (35):

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) + 2\alpha(1+\mu)C_1 \ln r + 2\alpha(1+\mu)C_2. \tag{68}$$

Для несжимаемого материала:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 3\alpha C_1 \ln r + 3\alpha C_2. \tag{69}$$

Таким образом, деформации, найденные по формулам (38) и (39), удовлетворяют условию несжимаемости (69).

Однозначное радиальное перемещение $u(r)$ будем искать по следующей формуле [2, 23-27]:

$$u(r) = \frac{1}{2}\left[r\varepsilon_\theta + \int \varepsilon_r dr\right]. \tag{70}$$

Рассмотрим уравнение совместимости деформаций (2):

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\varepsilon_\theta}{dr}\right) - r\frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0; \tag{71}$$

$$2r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + r^2\frac{d^2\varepsilon_\theta}{dr^2} - r\frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0; \tag{72}$$

$$r\frac{d^2\varepsilon_\theta}{dr^2} + \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} - \frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0; \tag{73}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}\right) + \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} - \frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0. \tag{74}$$

Проинтегрируем уравнение (74) один раз по r:

$$r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = \Omega = const. \tag{75}$$

Получим $\Omega = 0$.

Используем теперь соотношения Коши (3):

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \tag{76}$$

На основании (70) получим:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_\theta + \frac{1}{r}\int \varepsilon_r dr\right]; \tag{77}$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_\theta + r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_r\right]. \tag{78}$$

Эти соотношения можно записать следующим образом:

$$2\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta + \frac{1}{r}\int \varepsilon_r dr; \tag{79}$$

$$2\varepsilon_r = \varepsilon_\theta + \varepsilon_r + r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}; \tag{80}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\int \varepsilon_r dr; \tag{81}$$

$$r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0; \tag{82}$$

$$r\varepsilon_\theta = \int \varepsilon_r dr; \tag{83}$$

$$r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta = \varepsilon_r; \quad r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0. \tag{84}$$

Соотношения Коши выполняются при условии выполнения уравнения совместности деформации (75).

Выпишем соотношения для деформаций и напряжений:

$$\sigma_r = \frac{A_1}{r^2} + A_2(1 + 2\ln r) + 2A_3; \tag{85}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{A_1}{r^2} + A_2(3 + 2\ln r) + 2A_3; \tag{86}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{B_1}{r^2} + B_2(1 + 2\ln r) + 2B_3; \tag{87}$$

$$\varepsilon_r = -\frac{B_1}{r^2} + B_2(3 + 2\ln r) + 2B_3. \tag{88}$$

Используем граничные условия:

$$\sigma_r(r = r_1) = -p; \quad \sigma_r(r = r_2) = -q; \tag{89}$$

$$\frac{A_1}{r_1^2} + A_2(1 + 2\ln r_1) + 2A_3 = -p; \tag{90}$$

$$\frac{A_1}{r_2^2} + A_2(1 + 2\ln r_2) + 2A_3 = -q; \tag{91}$$

$$A_1\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) + A_2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = p - q; \tag{92}$$

$$A_1\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) = p - q - A_2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2; \tag{93}$$

$$A_1 = \frac{r_1^2 r_2^2\left[p - q - A_2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]}{(r_1^2 - r_2^2)}; \tag{94}$$

$$2A_3 = -p - \frac{A_1}{r_1^2} - A_2(1 + 2\ln r_1); \tag{95}$$

$$A_3 = -\frac{p}{2} - \frac{A_1}{2r_1^2} - A_2(1 + 2\ln r_1). \tag{96}$$

В соответствии с формулой (58):

$$A_2 = -\frac{\alpha E C_1}{(3 - 2\mu)}; \tag{97}$$

$$B_1 = -\frac{(1+\mu)}{E}A_1; \quad B_2 = \frac{\alpha(1+\mu)C_1}{(3 - 2\mu)}; \tag{98}$$

$$B_3 = -\frac{B_2}{2} + \frac{(1+\mu)}{2E}\{(3 - 4\mu)A_2 + 2(1 - 2\mu)A_3\} + \alpha(1+\mu)C_2; \tag{99}$$

$$\begin{gathered} u(r) = \frac{1}{2}\left[r\varepsilon_\theta + \int \varepsilon_r dr\right] = \\ = \frac{1}{2}\left[\frac{B_1}{r} + rB_2(1 + 2\ln r) + 2rB_3 + \right. \\ \left. + \int \left\{\frac{-B_1}{r^2} + B_2(3 + 2\ln r) + 2B_3\right\} dr\right]; \end{gathered} \tag{100}$$

$$
\begin{gathered}
u(r) = \frac{B_1}{2r} + \frac{rB_2}{2}(1 + 2\ln r) + rB_3 + \frac{B_1}{2r} + \\
+\frac{3}{2}B_2 r + B_2(r\ln r - r) + B_3 r = \\
= \frac{B_1}{r} + 2B_2 r\ln r - \frac{B_2}{2}r + \frac{3}{2}B_2 r + 2rB_3 = \\
= \frac{B_1}{r} + 2B_2 r\ln r + (2B_3 + B_2)r.
\end{gathered} \tag{101}
$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Тимошенко, С. П. Теория упругостей : учеб. / С. П. Тимошенко, Д. Ж. Гудьер. – М. : Наука, 1975 – 576 с.

2 Огарков, В. Б. Плоская деформация ортотропного цилиндра из древесных материалов / В. Б. Огарков, Л. И. Стадник // Материалы международной научно-технической конференции «Современные технологические процессы получения материалов и изделий из древесины». – Воронеж : ВГЛТА, 2010. – С. 259-261.

3 Варданян, Г. С. Сопротивление материалов / Г. С. Варданян, В. И. Андреев, Н. М. Атаров, А. А. Горшков. – М. : «Наука», 1995. – 568 с.

4 Аксенов, А. А. Полный расчет на прочность упругой балки при изгибе / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2018. – Т. 1. – № 1 (23). – С. 75-80.

5 Горшков, А. Г. Сопротивление материалов : учеб. пособ. / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – 2-е издание испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.

6 Кучерявый, В. И. Теория упругости : учеб. пособие / В. И. Кучерявый. – Ухта : УГТУ, 2011. – 126 с.

7 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов : учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – 10-е издание, перераб. и доп. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.

8 Аксенов, А. А. Расчет напряженно-деформированного состояния изотропного упругого цилиндра при стационарном тепловом воздействии / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2017. – Т. 1. – № 1 (19). – С. 39-47.

9 Аксенов, А. А. Расчет на прочность упругой балки при изгибе с цилиндрическим и коническим профилем / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков, К. Б. Просветов, И. Д. Гаврилов // Воронежский научно-технический Вестник. – 2016. – Т. 2. – № 2 (16). – С. 101-104.

10 Krotov, V. Application of the method of the principal components for the analysis of bearing ability of the wheel pair of the car : V. Krotov, S. Krotov // Transport Problems. – 2009. – Vol. 4. – № 4. pp. 15-23.

11 Shlyannikov, V. N. Method for assessment of the residual life of turbine disks : V. N. Shlyannikov, R. R. Yarullin // Inorganic Materials. – 2010. Vol. 46. – № 15. – pp. 1683-1687.

12 Kolmogorov, V. L. The calculation of stress-deformed state under non-isothermic plastic flow-the example of parallelepiped settling : V. L. Kolmogorov, R. E. Lapovok // Computers & Structures. – 1992. – Vol. 44. – № 1-2. – pp. 419-424.

13 Корн, Г. Справочник по математике : учеб. / Г. Корн, Т. Корн. – М. : «Наука», 1970. – 720 с

14 Водопьянов, В. И. Курс сопротивления материалов с примерами и задачами : учеб. пособие / В. И. Водопьянов, А. Н. Савкин, О. В. Кондратьев; ВолгГТУ. – Волгоград, 2012. – 136 с.

15 Ашкенази, Е. К. Анизотропия древесины и древесных материалов : учеб. / Е. К. Ашкенази. – М. : Лесная промышленность, 1978. – 224 с.

16 Аксенов, А. А. Способ расчета на прочность упругой балки из древесного материала / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2016. – Т. 3. – № 3 (17). – С. 53-56.

17 Benabou, L. Predictions of compressive strength and kink band orientation for wood species : L. Benabou // Mechanics of materials. – 2008. – Т. 42. – Вып. 3. – С. 335-343. – DOI : 10.1016/j.mechmat.2009.11.015.

18 Burgert, I. The tensile strength of isolated wood rays of beech (Fagus sylvatica L.) and its significance for the biomechanics of living trees : I. Burgert, D. Eckstein // Trees-structure and function. – 2001. – Т. 15. – Вып. 3. – С. 168-170. – DOI : 10.1007/s004680000086.

19 Cowin, Sc. Strength anisotropy of bone and wood : Sc.Cowin // Journal of applied mechanics-transactions of the asme. – 1979. – Т. 46. – Вып. 4. – С. 832-838. – DOI : 10.1115/1.3424663

20 De Magistris, F Deformation of wet wood under combined shear and

compression : F. De Magistris, L. Salmen // Wood science and technology. – 2005. – Т. 39. – Вып. 6. – С. 460-471. – DOI: 10.1007/s00226-005-0025-x.

21 Aydemir, D. The Lap Joint Shear Strength of Wood Materials Bonded by Cellulose Fiber-Reinforced Polyvinyl Acetate : D. Aydemir // Bioresources. – 2014. – Т. 9. – Вып. 1. – С. 1179-1188.

22 Galicki, J. A new approach to formulate the general strength theories for anisotropic discontinuous materials. Part A : The experimental base for a new approach to formulate the general strength theories for anisotropic materials on the basis of wood : J. Galicki, M. Czech // Applied mathematical modeling. – 2013. – Т. 37. – Вып. 3. – С. 815-827. – DOI: 10.1016/j.apm.2012.03.004.

23 Chida, Tomohiro A Proposed Standard Test Method for Shear Failure and Estimation of Shear Strength of Japanese Cedar I. Shear failure test of Japanese cedar laminates using wood material as stiffener and finite element analysis, and estimation of shear modulus : T. Chida, T. Sasaki, H. Yamauchi, Y. Okazaki, Y. Kawai, Y. Iijima, // Mokuzai gakkaishi. – 2012. – Т. 58. – Вып. 5. – С. 260-270. – DOI : 10.2488/jwrs.58.260.

24 Riyanto, Ds A comparison of test methods for evaluating shear strength of structural lumber : Ds. Riyanto, R. Gupta // Forest products journal. – 1998. – Т. 48. – Вып. 2. – С. 83-90.

25 Longworth, J. Longitudinal shear-strength of timber beams : J. Longworth // Forest products journal. – 1977. – Т. 27. – Вып. 8. – С. 19-23.

26 Dumail, Jf. Smear and compression behavior of wood in relation to mechanical pulping : Jf. Dumail, L. Salmen // Tappi international mechanical pulping conference. – 1999. – С. 213-219

27 Bendtsen, Ba. Rolling shear characteristics of 9 structural softwoods : Ba. Bendtsen // Forest products journal. – 1976. – Т. 26. – Вып. 11. – С. 51-56.