УДК 620.1 DOI: 10.34220/2311-8873-2020-3-3-94-112

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНО-ВЛАЖНОСТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Огарков В.Б., Аксенов А.А., Малюков С.В., Малюкова М.А.
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»
E-mail: mf@vglta.vrn.ru

Аннотация: Рассмотрена актуальная научно-практическая задача о плоской деформации упругого цилиндра в условиях температурно-влажностного воздействия. Цилиндрическую форму имеют различные трубы, валы, подшипники скольжения, втулки из естественной и модифицированной древесины и т.д. Дано точное аналитическое решение данной задачи для изотропного цилиндра в случае стационарного температурно-влажностного воздействия. Все формулы для напряжений и деформаций содержат механические и теплофизические константы, что соответствует физическому смыслу. Доказано, что использование классических методов решения данной задачи через потенциалы напряжений и перемещений приводит к нежелательному результату, при котором напряжения или деформации не зависят от теплофизической константы C_2, что противоречит физическому смыслу.

Ключевые слова: деформирование упругого цилиндра, температурно-влажностное воздействие на изотропный цилиндр, закон Гука.

CALCULATION OF STRESS-DEFORMED STATE OF ELASTIC CYLINDERS UNDER TEMPERATURE AND HUMIDITY IMPACT

Ogarkov V.B., Aksenov A.A., Malyukov S.V., Malyukova M.A.
Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Voronezh State Forestry University. G.F. Morozova»
E-mail: mf@vglta.vrn.ru

Summary: The actual scientific and practical problem of plane deformation of an elastic cylinder under conditions of temperature and humidity is considered. Various pipes, shafts, plain bearings, bushings from natural and modified wood, etc. have a cylindrical shape. An exact analytical solution of this problem is given for an isotropic cylinder in the case of stationary temperature and humidity exposure. All formulas for stresses and strains and stresses contain mechanical and thermophysical constants, which corresponds to the physical meaning. It is proved that the use of classical methods for solving this problem through the potentials of stresses and displacements leads to an undesirable result in which stresses or deformations do not depend on the thermophysical constant C_2, which contradicts the physical meaning.

Keywords: deformation of an elastic cylinder, temperature and humidity effect on an isotropic cylinder, Hooke's law.

ВВЕДЕНИЕ

Проектирование и расчет напряженно-деформированного состояния упругих и упруго-вязко-пластических цилиндров из сжимаемого материала имеет важное научно-практическое значение [1, 10]. Цилиндр является основной деталью при изготовлении труб, валов, подшипников скольжения, различных втулок из естественной и модифицированной древесины и т.д. Однако до настоящего времени использующиеся известные методы решения таких задач нередко приводят к нежелательному результату – независимости полученных формул от механических и теплофизических констант. Поэтому получение общих решений, которые позволяют изучить зависимость напряжений и деформаций от механических и теплофизических постоянных имеет большое значение. Такие формулы могут успешно быть внедрены как в научно-исследовательских отчетах, так и в учебном процессе в курсах сопротивления материалов и древесиноведения.

1 ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ТЕМПЕРАТУРНО-ВЛАЖНОСТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Рассмотрим плоскую деформацию упругого изотропного цилиндра при полярно-симметричном деформировании в условиях температурно-влажностного воздействия. Основная система уравнений имеет следующий вид [1, 2, 5, 8].

Уравнение равновесия:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}+\sigma_r-\sigma_\theta=0. \tag{1}$$

Геометрические соотношения Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \tag{2}$$

Уравнение совместности деформаций:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\varepsilon_\theta}{dr}\right) - r\frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0. \tag{3}$$

Обобщенный закон Гука в случае стационарного теплового воздействия:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T(r); \tag{4}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T(r); \tag{5}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_\theta + \sigma_r)] + \alpha T(r). \tag{6}$$

В случае плоской деформации:

$$\varepsilon_z = 0; \tag{7}$$

$$\sigma_z = \mu(\sigma_\theta + \sigma_r) - E\alpha T(r). \tag{8}$$

Подставим формулу (8) в закон Гука (4)-(5):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}[\sigma_r - \mu\sigma_\theta - \mu\{\mu(\sigma_\theta + \sigma_r) - E\alpha T\}] + \alpha T = \\ &= \frac{1}{E}[(1-\mu^2)\sigma_r - \mu(1+\mu)\sigma_\theta] + \alpha(1+\mu)T; \end{aligned} \tag{9}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[(1-\mu^2)\sigma_\theta - \mu(1+\mu)\sigma_r] + \alpha(1+\mu)T. \tag{10}$$

Уравнение теплопроводности в случае полярной симметрии имеет вид [1, 4-8]:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0. \tag{11}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2. \tag{12}$$

Граничные условия имеют вид:

При $r = r_1$: $T = T_1$; при $r = r_2$: $T = T_2$. (13)

С учетом граничных условий, получим:

$$C_1 = \frac{(T_2 - T_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}; \quad C_2 = \frac{[T_1 \ln r_2 - T_2 \ln r_1]}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \tag{14}$$

Обобщенный закон Гука (9)-(10):

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[(1-\mu^2)\sigma_r - \mu(1+\mu)\sigma_\theta] + \alpha(1+\mu)C_1 \ln r + \alpha(1+\mu)C_2; \tag{15}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[(1-\mu^2)\sigma_\theta - \mu(1+\mu)\sigma_r] + \alpha(1+\mu)C_1 \ln r + \alpha(1+\mu)C_2; \tag{16}$$

$$\varepsilon_r = \frac{(1+\mu)}{E}[(1-\mu)\sigma_r - \mu\sigma_\theta] + \alpha(1+\mu)C_1 \ln r + \alpha(1+\mu)C_2; \tag{17}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{(1+\mu)}{E}[(1-\mu)\sigma_\theta - \mu\sigma_r] + \alpha(1+\mu)C_1 \ln r + \alpha(1+\mu)C_2. \tag{18}$$

Будем искать решение данной задачи в следующем виде:

$$\sigma_r = \frac{A_1}{r^2} + A_2(1 + 2\ln r) + 2A_3; \tag{19}$$

$$\sigma_\theta = \frac{-A_1}{r^2} + A_2(3 + 2\ln r) + 2A_3; \tag{20}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{B_1}{r^2} + B_2(1 + 2\ln r) + 2B_3; \tag{21}$$

$$\varepsilon_r = \frac{-B_1}{r^2} + B_2(3 + 2\ln r) + 2B_3. \tag{22}$$

Подставим формулы (19)-(22) в обобщенный закон Гука (17)-(18):

$$\begin{gathered}\frac{-B_1}{r^2} + B_2(3 + 2\ln r) + 2B_3 = \\ = \frac{(1+\mu)}{E}\left[(1-\mu)\left\{\frac{A_1}{r^2} + A_2(1 + 2\ln r) + 2A_3\right\} - \right. \\ \left. -\mu\left\{\frac{-A_1}{r^2} + A_2(3 + 2\ln r) + 2A_3\right\}\right] + \alpha(1+\mu)C_1 \ln r + \alpha(1+\mu)C_2;\end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered}\frac{B_1}{r^2} + B_2(1 + 2\ln r) + 2B_3 = \\ = \frac{(1+\mu)}{E}\left[(1-\mu)\left\{\frac{-A_1}{r^2} + A_2(3 + 2\ln r) + 2A_3\right\} - \right. \\ \left. -\mu\left\{\frac{A_1}{r^2} + A_2(1 + 2\ln r) + 2A_3\right\}\right] + \alpha(1+\mu)C_1 \ln r + \alpha(1+\mu)C_2;\end{gathered} \tag{24}$$

$$\frac{-B_1}{r^2} + 2B_2 \ln r + 3B_2 + 2B_3 = \\ = \frac{(1+\mu)}{E}\left[\frac{A_1}{r^2} + 2(1-2\mu)A_2 \ln r + (1-3\mu)A_2 + \right. \\ \left. +2(1-2\mu)A_3\right] + \alpha(1+\mu)C_1 \ln r + \alpha(1+\mu)C_2; \tag{25}$$

$$\frac{B_1}{r^2} + 2B_2 \ln r + B_2 + 2B_3 = \\ = \frac{(1+\mu)}{E}\left[\frac{-A_1}{r^2} + 2(1-2\mu)A_2 \ln r + (3-4\mu)A_2 + \right. \\ \left. +2(1-2\mu)A_3\right] + \alpha(1+\mu)C_1 \ln r + \alpha(1+\mu)C_2; \tag{26}$$

$$B_1 = -\frac{(1+\mu)}{E}A_1; \tag{27}$$

$$2B_2 = 2(1+\mu)(1-2\mu)A_2 + \alpha(1+\mu)C_1; \tag{28}$$

$$B_2 = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)A_2}{E} + \frac{\alpha}{2}(1+\mu)C_1; \tag{29}$$

$$3B_2 + 2B_3 = \frac{(1+\mu)}{E}(1-4\mu)A_2 + \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3 + \alpha(1+\mu)C_2; \tag{30}$$

$$B_2 + 2B_3 = \frac{(1+\mu)}{E}(3-4\mu)A_2 + \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3 + \alpha(1+\mu)C_2; \tag{31}$$

$$\frac{3}{E}\left[(1+\mu)(1-2\mu)A_2 + \frac{\alpha}{2}(1+\mu)C_1\right] = \\ = \frac{(1+\mu)}{E}(3-4\mu)A_2 + \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3 + \alpha(1+\mu)C_2 - 2B_3; \tag{32}$$

$$(1+\mu)(1-2\mu)A_2 + \frac{\alpha}{2}(1+\mu)C_1 = \\ = \frac{(1+\mu)(3-4\mu)}{E}A_2 + \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3 + \alpha(1+\mu)C_2 - 2B_3; \tag{33}$$

$$\frac{3(1+\mu)(1-2\mu)A_2}{E} + \frac{3}{2}\alpha(1+\mu)C_1 = \\ = \frac{(1+\mu)(3-4\mu)A_2}{E} + \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)A_3}{E} + \alpha(1+\mu)C_2 - 2B_3; \tag{34}$$

$$2B_2 = \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)A_2}{E} + \alpha(1+\mu)C_1; \tag{35}$$

$$B_2 = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)A_2}{E} + \frac{\alpha(1+\mu)}{2}C_1; \tag{36}$$

$$3B_2 + 2B_3 = \frac{(1+\mu)(1-4\mu)}{E}A_2 + \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3 + \alpha(1+\mu)C_2; \quad (37)$$

$$B_2 + 2B_3 = \frac{(1+\mu)(3-4\mu)}{E}A_2 + \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3 + \alpha(1+\mu)C_2; \quad (38)$$

$$\begin{gathered}\frac{3(1+\mu)(1-2\mu)A_2}{E} + \frac{\alpha(1+\mu)}{2}C_1 + 2B_3 = \\ = \frac{(1+\mu)(1-4\mu)}{E}A_2 + \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3 + \alpha(1+\mu)C_2;\end{gathered} \quad (39)$$

$$\begin{gathered}\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_2 + \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3 + \alpha(1+\mu)C_2 + 2B_3 = \\ = \frac{(1+\mu)(3-4\mu)}{E}A_2 + \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3 + \alpha(1+\mu)C_2;\end{gathered} \quad (40)$$

$$\begin{gathered}\frac{3(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_2 - \frac{(1+\mu)(1-4\mu)}{E}A_2 = \\ = \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3 + \alpha(1+\mu)C_2 - \frac{3}{2}\alpha(1+\mu)C_1 - 2B_3;\end{gathered} \quad (41)$$

$$\begin{gathered}\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_2 - \frac{(1+\mu)(3-4\mu)}{E}A_2 = \\ = \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3 + \alpha(1+\mu)C_2 - \frac{\alpha}{2}(1+\mu)C_1 - 2B_3;\end{gathered} \quad (42)$$

$$\begin{gathered}\frac{A_2(1+\mu)}{E}[3(1-2\mu) - (1-4\mu)] = \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3 + \\ +\alpha(1+\mu)C_2 - \frac{3}{2}\alpha(1+\mu)C_1 - 2B_3;\end{gathered} \quad (43)$$

$$\begin{gathered}\frac{A_2(1+\mu)}{E}[(1-2\mu) - (3-4\mu)] = \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3 + \\ +\alpha(1+\mu)C_2 - \frac{3}{2}\alpha(1+\mu)C_1 - 2B_3;\end{gathered} \quad (44)$$

$$\begin{gathered}\frac{2(1+\mu)A_2(1-\mu)}{E} = \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3 + \\ +\alpha(1+\mu)C_2 - \frac{3}{2}\alpha(1+\mu)C_1 - 2B_3;\end{gathered} \quad (45)$$

$$\begin{gathered}\frac{2(1+\mu)A_2(\mu-1)}{E} = \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3 + \\ +\alpha(1+\mu)C_2 - \frac{\alpha}{2}(1+\mu)C_1 - 2B_3.\end{gathered} \quad (46)$$

Приравняем соотношения (45) и (46):

$$\frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3+\alpha(1+\mu)C_2-\frac{3}{2}\alpha(1+\mu)C_1-2B_3= \\ =-\frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3-\alpha(1+\mu)C_2+\frac{\alpha}{2}(1+\mu)C_1+2B_3; \tag{47}$$

$$\frac{4(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3=-2\alpha(1+\mu)C_2+2\alpha(1+\mu)C_1+4B_3; \tag{48}$$

$$A_3=\frac{E[2\alpha(1+\mu)C_1-2\alpha(1+\mu)C_2+4B_3]}{4(1+\mu)(1-2\mu)}. \tag{49}$$

Используем соотношение (45):

$$\frac{2A_2(1-\mu)^2}{E}=\frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3+ \\ +\alpha(1+\mu)C_2-\frac{3}{2}\alpha(1+\mu)C_1-2B_3; \tag{50}$$

$$A_2=\frac{E}{2(1-\mu)^2}\left[\frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3+\right. \\ \left.+\alpha(1+\mu)C_2-\frac{3}{2}\alpha(1+\mu)C_1-2B_3\right]. \tag{51}$$

Проверим выполнение уравнения (46):

$$\frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3+\alpha(1+\mu)C_2-\frac{3}{2}\alpha(1+\mu)C_1-2B_3= \\ =-\left[\frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3+\alpha(1+\mu)C_2-\frac{\alpha}{2}(1+\mu)C_1-2B_3\right]; \tag{52}$$

$$\frac{4(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_3=-2\alpha(1+\mu)C_2+2\alpha(1+\mu)C_1+4B_3. \tag{53}$$

Соотношение (53) совпадает с соотношением (48).

Подсчитаем величину A_2:

$$A_2=\frac{A_3}{(1-\mu)}+\frac{\alpha EC_2}{2(1-\mu)}-\frac{3}{4}\frac{\alpha EC_1}{(1-\mu)}-\frac{EB_3}{(1-\mu^2)}. \tag{54}$$

Подсчитаем коэффициент B_2 по формуле (36):

$$B_2=\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}\left[\frac{A_3}{(1-\mu)}+\frac{\alpha EC_2}{2(1-\mu)}-\frac{3}{4}\frac{\alpha EC_1}{(1-\mu)}-\frac{EB_3}{(1-\mu^2)}\right]+ \\ +\frac{\alpha}{2}(1+\mu)C_1; \tag{55}$$

$$B_2 = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} A_3 + \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}\left[\frac{\alpha E C_2}{2(1-\mu)} - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{4}\frac{\alpha E C_1}{(1-\mu)} - \frac{E B_3}{(1-\mu^2)}\right]; \tag{56}$$

$$B_2 = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} A_3 + (1+\mu)(1-2\mu)\left[\frac{\alpha C_2}{2(1-\mu)} - \frac{3\alpha C_1}{4} + \frac{B_3}{(1+\mu)}\right]; \tag{57}$$

$$B_2 = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} \frac{E[2\alpha(1+\mu)C_1 - 2\alpha(1+\mu)C_2]}{4(1+\mu)(1-2\mu)} +$$
$$+ \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} 4EB_3 + \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)}\left[\frac{\alpha C_2}{2} - \frac{3\alpha C_1}{4} + \frac{B_3}{(1+\mu)}\right]; \tag{58}$$

$$B_2 = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)2\alpha(1+\mu)}{4(1-\mu)(1+\mu)(1-2\mu)}(C_1 - C_2) +$$
$$+ \frac{(1+\mu)(1-2\mu)4}{(1-\mu)} B_3 + \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)}\left[\frac{\alpha C_2}{2} - \frac{3\alpha C_1}{4} + \frac{B_3}{(1+\mu)}\right]; \tag{59}$$

$$B_2 = \frac{\alpha(1+\mu)}{2}(C_1 - C_2) + \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)} B_3 +$$
$$\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)}\left[\frac{\alpha C_2}{2} - \frac{3\alpha C_1}{4} + \frac{B_3}{(1+\mu)}\right]. \tag{60}$$

Запишем выражение для тангенциальной и радиальной деформаций:

$$\varepsilon_\theta = \frac{B_1}{r^2} + B_2(1 + 2\ln r) + 2B_3; \tag{61}$$

$$\varepsilon_r = -\frac{B_1}{r^2} + B_2(3 + 2\ln r) + 2B_3. \tag{62}$$

Однозначное радиальное перемещение будем находить по следующей формуле [2, 9, 11-14]:

$$u(r) = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_\theta r + \int \varepsilon_r dr\right]. \tag{63}$$

Подставим формулы (61) и (62) в соотношение (63):

$$u(r) = \frac{1}{2}\left[r\left\{\frac{B_1}{r^2} + B_2 + 2B_2\ln r + 2B_3\right\} + \right.$$
$$\left. + \int\left\{-\frac{B_1}{r^2} + 3B_2 + 2B_2\ln r + 2B_3\right\}dr\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{B_1}{r} + (B_2 + 2B_3)r + 2B_2 r \ln r + \right.$$

$$\left. + \frac{B_1}{r} + (3B_2 + 2B_3)r + 2B_2(r \ln r - r)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2B_1}{r} + (4B_2 + 4B_3)r - 2B_2 r + 4B_2 \ln r\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2B_1}{r} + 2(B_2 + 2B_3)r + 4B_2 \ln r\right]; \qquad (64)$$

$$u(r) = \frac{B_1}{r} + (B_2 + 2B_3)r + 2B_2 \ln r. \qquad (65)$$

Пусть заданы граничные условия в перемещениях:

$$u(r = r_1) = u_1; \quad u(r = r_2) = u_2; \qquad (66)$$

$$\begin{aligned} &\frac{B_1}{r_1} + (B_2 + 2B_3)r_1 + 2B_2 \ln r_1 = u_1; \\ &\frac{B_1}{r_2} + (B_2 + 2B_3)r_2 + 2B_2 \ln r_2 = u_2. \end{aligned} \qquad (67)$$

Используем формулу (60):

$$B_2 = aB_3 + b; \qquad (68)$$

$$a = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)}; \qquad (69)$$

$$b = \frac{\alpha(1+\mu)(C_1 - C_2)}{2} + \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)}\left[\frac{\alpha C_2}{2} - \frac{3\alpha C_1}{4} + \frac{B_3}{(1+\mu)}\right]; \qquad (70)$$

$$\frac{B_1}{r_1} + (aB_3 + b)r_1 + 3B_3 r_1 + 2(aB_3 + b)\ln r_1 = u_1; \qquad (71)$$

$$\frac{B_1}{r_2} + (aB_3 + b)r_2 + 2B_3 r_2 + 2(aB_3 + b)\ln r_2 = u_2; \qquad (72)$$

$$\frac{B_1}{r_1} + [ar_1 + 2r_1 + 2a \ln r_1]B_3 = u_1 - br_1 - 2ab \ln r_1; \qquad (73)$$

$$\frac{B_1}{r_2} + [ar_2 + 2r_2 + 2a \ln r_2]B_3 = u_2 - br_2 - 2ab \ln r_2; \qquad (74)$$

$$B_1 + [ar_1^2 + 2r_1^2 + 2ar_1 \ln r_1]B_3 = u_1 r_1 - br_1^2 - 2abr_1 \ln r_1; \qquad (75)$$

$$B_1 + [ar_2^2 + 2r_2^2 + 2ar_2 \ln r_2]B_3 = u_2 r_2 - br_2^2 - 2abr_2 \ln r_2; \qquad (76)$$

$$B_3[a(r_2^2 - r_1^2) + 2(r_2^2 - r_1^2) + 2a(r_2 \ln r_2 - r_1 \ln r_1)] = \\ = u_2 r_2 + b r_1^2 + 2ab r_1 \ln r_1 - u_1 r_1 - b r_2^2 - 2ab r_2 \ln r_2; \qquad (77)$$

$$B_3 = \frac{[a(r_2^2 - r_1^2) + 2(r_2^2 - r_1^2) + 2a(r_2 \ln r_2 - r_1 \ln r_1)]}{[u_2 r_2 + b r_1^2 + 2ab r_1 \ln r_1 - u_1 r_1 - b r_2^2 - 2ab r_2 \ln r_2]}; \qquad (78)$$

$$B_1 = r_1[u_1 - b r_1 - 2ab \ln r_1] - r_1[a r_1 + 2 r_1 + 2a \ln r_1]; \qquad (79)$$

$$A_1 = -\frac{E}{(1+\mu)} B_1. \qquad (80)$$

Коэффициенты A_2 и A_3 находятся по формулам (49) и (53).

Пусть граничные условия заданы в напряжениях:

$$\sigma_r(r = r_1) = -p; \quad \sigma_r(r = r_2) = -q. \qquad (81)$$

Имеем выражения для напряжений:

$$\sigma_r = \frac{A_1}{r^2} + A_2(1 + 2 \ln r) + 2A_3; \qquad (82)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{A_1}{r^2} + A_2(3 + 2 \ln r) + 2A_3. \qquad (83)$$

Подсчитаем величину A_2 по формуле (51):

$$A_2 = \frac{(1-2\mu)}{(1-\mu)} A_3 + \frac{\alpha E C_2}{2(1-\mu)} - \frac{3}{4}\frac{\alpha C_1 E}{(1-\mu)} - \frac{E B_3}{(1-\mu^2)}; \qquad (84)$$

$$A_2 = \frac{(1-2\mu)}{(1-\mu)} A_3 + \frac{E}{(1-\mu)}\left(\frac{\alpha C_2}{2} - \frac{3}{4}\alpha C_1 - \frac{B_3}{(1+\mu)}\right). \qquad (85)$$

Подставим в формулу (82) соотношение (49):

$$A_2 = \frac{(1-2\mu)}{(1-\mu)} \frac{2\alpha E(1+\mu)(C_1 - C_2)}{4(1+\mu)(1-2\mu)} + \frac{(1-2\mu)}{(1-\mu)} \frac{E B_3}{(1+\mu)(1-2\mu)} + \\ + \frac{E}{(1-\mu)}\left[\frac{\alpha C_2}{2} - \frac{3}{4}\alpha C_1 - \frac{B_3}{(1+\mu)}\right];$$

$$A_2 = \frac{\alpha E(C_1 - C_2)}{2(1-\mu)} + \frac{E}{(1-\mu)}\left[\frac{\alpha C_2}{2} - \frac{3}{4}\alpha C_1 - \frac{B_3}{(1+\mu)}\right] + \frac{E B_3}{(1-\mu^2)} =$$

$$= \frac{\alpha E(C_1 - C_2)}{2(1-\mu)} + \frac{\alpha E}{2(1-\mu)}\left(C_2 - \frac{3}{2}C_1\right) = \frac{\alpha E}{2(1-\mu)}\left[C_1 - C_2 + C_2 - \frac{3}{2}C_1\right] =$$

$$= -\frac{\alpha E C_1}{4(1-\mu)}; \quad A_2 = \frac{\alpha E C_1}{4(1-\mu)}. \qquad (86)$$

Используем формулу (80):

$$\sigma_r = \frac{A_1}{r^2} + A_2 + 2A_3 + 2A_2 \ln r\,; \tag{87}$$

$$\frac{A_1}{r_1^2} + A_2 + 2A_3 + 2A_2 \ln r_1 = -p; \tag{88}$$

$$\frac{A_1}{r_2^2} + A_2 + 2A_3 + 2A_2 \ln r_2 = -q; \tag{89}$$

$$A_1\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) + 2A_2 \ln\frac{r_2}{r_1} = p - q; \tag{90}$$

$$A_1 = \frac{r_1^2 r_2^2\left[p - q2A_2 \ln\frac{r_2}{r_1}\right]}{(r_1^2 - r_2^2)}; \tag{91}$$

$$2A_3 = -p - 2A_2 \ln r_1 - A_2 - \frac{A_1}{r_1^2}; \tag{92}$$

$$A_3 = -\frac{p}{2} - A_2 \ln r_1 - \frac{A_2}{2} - \frac{A_1}{2r_1^2}; \tag{93}$$

$$B_1 = -\frac{(1+\mu)}{A_1}; \tag{94}$$

$$B_2 = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}A_2 + \frac{\alpha(1+\mu)}{2}C_1; \tag{95}$$

$$A_3 = \frac{E\alpha(C_1 - C_2)}{2(1-2\mu)} + \frac{B_3}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \tag{96}$$

$$\frac{B_3}{(1+\mu)(1-2\mu)} = A_3 - \frac{E\alpha(C_1 - C_2)}{2(1-2\mu)}; \tag{97}$$

$$B_3 = (1+\mu)(1-2\mu)A_3 - \frac{E\alpha(1+\mu)(C_1 + C_2)}{2}. \tag{98}$$

Таким образом, все полученные выше формулы для напряжений, деформаций и радиального перемещения содержат в явной форме теплофизические константы C_1 и C_2.

2 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

Рассмотрим алгоритм решения данной задачи в напряжениях.

Деформации имеют следующий вид:

$$\varepsilon_r = \frac{(1+\mu)}{E}[(1-\mu)\sigma_r - \mu\sigma_\theta] + \alpha(1+\mu)C_1 \ln r + \alpha(1+\mu)C_2; \quad (99)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{(1+\mu)}{E}[(1-\mu)\sigma_\theta - \mu\sigma_r] + \alpha(1+\mu)C_1 \ln r + \alpha(1+\mu)C_2. \quad (100)$$

Введем в рассмотрение потенциал напряжений [3, 5]:

$$\sigma_r = \frac{\varphi}{r}; \quad \sigma_\theta = \frac{d\varphi}{dr}. \quad (101)$$

Потенциал напряжений удовлетворяет уравнению равновесия (1).

Деформации примут следующий вид:

$$\varepsilon_r = \frac{(1+\mu)}{E}\left[(1-\mu)\frac{\varphi}{r} - \mu\frac{d\varphi}{dr}\right] + \alpha(1+\mu)C_1 \ln r + \alpha(1+\mu)C_2; \quad (102)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{(1+\mu)}{E}\left[(1-\mu)\frac{d\varphi}{dr} - \mu\frac{\varphi}{r}\right] + \alpha(1+\mu)C_1 \ln r + \alpha(1+\mu)C_2. \quad (103)$$

Уравнение совместности деформаций:

$$r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0. \quad (104)$$

Подставим деформации (99) и (100) в уравнение совместности деформаций (104):

$$\frac{(1+\mu)}{E} r\frac{d}{dr}\left[(1-\mu)\frac{d\varphi}{dr} - \mu\frac{\varphi}{r}\right] + \frac{(1+\mu)}{E}\left[\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r}\right] + \frac{\alpha(1+\mu)C_1}{r}; \quad (105)$$

$$r(1-\mu)\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{\mu r^\varphi}{r^2} - \mu\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r} = -\frac{\alpha E C_1}{r}; \quad (106)$$

$$(1-\mu)\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{(1-\mu)}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{(\mu-1)}{r^2\varphi} = -\frac{\alpha E C_1}{r^2}; \quad (107)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = -\frac{\alpha E C_1}{(1-\mu)r^2}. \quad (108)$$

Решение уравнения (108) имеет вид:

$$\varphi(r) = D_1 r + \frac{D_2}{r} + D_3; \quad (109)$$

$$-D_3 = -\frac{\alpha E C_1}{(1-\mu)}; \quad D_3 = \frac{\alpha E C_1}{(1-\mu)}; \quad (110)$$

$$\varphi(r) = D_1 r + \frac{D_2}{r} + \frac{\alpha E C_1}{(1-\mu)}; \tag{111}$$

$$\sigma_r = \frac{\varphi}{r} = D_1 + \frac{D_2}{r^2} + \frac{\alpha E C_1}{(1-\mu) r}; \tag{112}$$

$$\sigma_\theta = \frac{d\varphi}{dr} = D_1 - \frac{D_2}{r^2}. \tag{113}$$

Имеет следующие граничные условия:

$$\sigma_r(r = r_1) = -p; \quad \sigma_r(r = r_2) = -q; \tag{114}$$

$$D_1 + \frac{D_2}{r_1^2} + \frac{\alpha E C_1}{(1-\mu) r_1} = -p; \tag{115}$$

$$D_1 + \frac{D_2}{r_2^2} + \frac{\alpha E C_1}{(1-\mu) r_2}; \tag{116}$$

$$D_2\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) = p - q - \frac{\alpha E C_1}{(1-\mu)}\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right); \tag{117}$$

$$\frac{D_2(r_1^2 - r_2^2)}{r_1^2 r_2^2} = p - q + \frac{\alpha E C_1}{(1-\mu)}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right); \tag{118}$$

$$\frac{D_2(r_1^2 - r_2^2)}{r_1^2 r_2^2} = p - q + \frac{\alpha E C_1 (r_2^2 - r_1^2)}{r_1^2 r_2^2}; \tag{119}$$

$$D_2 = \frac{[(p-q) r_1^2 r_2^2 + \alpha E C_1 (r_2^2 - r_1^2)]}{(r_1^2 - r_2^2)}; \tag{120}$$

$$D_1 = -p - \frac{\alpha E C_1}{(1-\mu) r_1} - \frac{D_2}{r_1^2}. \tag{121}$$

Из формул (109), (112), (113), (120) и (121) следует, что напряжения σ_r и σ_θ не зависят от физической константы C_2, что нежелательно.

3 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Обобщенный закон Гука при температурно-влажностном воздействии имеет следующий вид:

$$\varepsilon_r = \frac{(1+\mu)}{E}[(1-\mu)\sigma_r - \mu\sigma_\theta] + \alpha(1+\mu) C_1 \ln r + \alpha(1+\mu) C_2; \tag{122}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{(1+\mu)}{E}[(1-\mu)\sigma_\theta - \mu\sigma_r] + \alpha(1+\mu)C_1 \ln r + \alpha(1+\mu)C_2. \quad (123)$$

Сложим и вычтем соотношения (122) и (123):

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}(\sigma_\theta + \sigma_r) + 2\alpha(1+\mu)C_1 \ln r + 2\alpha(1+\mu)C_2; \quad (124)$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = \frac{(1+\mu)}{E}(\sigma_r - \sigma_\theta); \quad (125)$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{E}{(1+\mu)}(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta); \quad (126)$$

$$\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}(\sigma_\theta + \sigma_r) = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta - 2\alpha(1+\mu)C_1 \ln r - 2\alpha(1+\mu)C_2; \quad (127)$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{E(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)}{(1+\mu)(1-2\mu)} - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_1 \ln r}{(1+\mu)(1-2\mu)} - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_2}{(1+\mu)(1-2\mu)}. \quad (128)$$

Сложим теперь соотношения (126) и (128):

$$\begin{gathered} 2\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)}(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) + \frac{E(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)}{(1+\mu)(1-2\mu)} - \\ - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_1 \ln r}{(1+\mu)(1-2\mu)} - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_2}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \end{gathered} \quad (129)$$

$$\begin{gathered} 2\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)}\left[\varepsilon_r - \varepsilon_\theta + \frac{(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)}{(1-2\mu)}\right] - \\ - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_1 \ln r}{(1+\mu)(1-2\mu)} - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_2}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \end{gathered} \quad (130)$$

$$\begin{gathered} 2\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-2\mu)(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) + \varepsilon_r + \varepsilon_\theta] - \\ - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_1 \ln r}{(1+\mu)(1-2\mu)} - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_2}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \end{gathered} \quad (131)$$

$$\begin{gathered} 2\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[2(1-\mu)\varepsilon_r + 2\mu\varepsilon_\theta] - \\ - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_1 \ln r}{(1+\mu)(1-2\mu)} - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_2}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \end{gathered} \quad (132)$$

$$2\sigma_r = \frac{2E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta] - \\ - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_1 \ln r}{(1+\mu)(1-2\mu)} - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_2}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \tag{133}$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta] - \\ - \frac{\alpha E(1+\mu)C_1 \ln r}{(1+\mu)(1-2\mu)} - \frac{\alpha E(1+\mu)C_2}{(1+\mu)(1-2\mu)}. \tag{134}$$

Вычтем из соотношения (128) соотношение (126):

$$2\sigma_\theta = \frac{E(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)}{(1+\mu)(1-2\mu)} - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_1 \ln r}{(1+\mu)(1-2\mu)} - \\ - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_2}{(1+\mu)(1-2\mu)} - \frac{E}{(1+\mu)}(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta); \tag{135}$$

$$2\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\mu)}\left[\frac{(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)}{(1-2\mu)} - \varepsilon_r + \varepsilon_\theta\right] - \\ - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_1 \ln r}{(1+\mu)(1-2\mu)} - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_2}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \tag{136}$$

$$2\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[\varepsilon_r + \varepsilon_\theta - (1-2\mu)\varepsilon_r + (1-2\mu)\varepsilon_\theta] - \\ - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_1 \ln r}{(1+\mu)(1-2\mu)} - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_2}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \tag{137}$$

$$2\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[2\mu\varepsilon_r + 2(1-\mu)\varepsilon_\theta] - \\ - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_1 \ln r}{(1+\mu)(1-2\mu)} - \frac{2\alpha E(1+\mu)C_2}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \tag{138}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r] - \\ - \frac{\alpha(1+\mu)EC_1 \ln r}{(1+\mu)(1-2\mu)} - \frac{\alpha(1+\mu)C_2}{(1+\mu)(1-2\mu)}. \tag{139}$$

Таким образом, закон Гука принимает следующий вид:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta] - \\ - \frac{\alpha(1+\mu)EC_1}{(1+\mu)(1-2\mu)}\ln r - \frac{\alpha(1+\mu)EC_2}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \tag{140}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r] - \\ -\frac{2(1+\mu)EC_1}{(1+\mu)(1-2\mu)}\ln r - \frac{\alpha(1+\mu)EC_2}{(1+\mu)(1-2\mu)}. \tag{141}$$

Подставим напряжения σ_r и σ_θ в уравнение равновесия (1):

$$\frac{Er}{(1+\mu)(1-2\mu)}\frac{d}{dr}\{(1-\mu)\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta\} + \\ +\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}(1-2\mu)(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) = 0; \tag{142}$$

$$r(1-\mu)\frac{d\varepsilon_r}{dr} + r\mu\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + (1-2\mu)(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) = 0. \tag{143}$$

Используем соотношения Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \tag{144}$$

$$r(1-\mu)\frac{d^2u}{dr^2} + \mu r\left(-\frac{u}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right) + (1-2\mu)\frac{du}{dr} - \frac{\alpha(1+\mu)C_1}{r} = 0; \tag{145}$$

$$r(1-\mu)\frac{d^2u}{dr^2} + (1-\mu)\frac{du}{dr} + (\mu-1)\frac{u}{r} = \frac{\alpha(1+\mu)C_1}{r}; \tag{146}$$

$$(1-\mu)\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{(1-\mu)}{r}\frac{du}{dr} - (1-\mu)\frac{u}{r^2} = \frac{\alpha(1+\mu)C_1}{r^2}; \tag{147}$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{\alpha(1+\mu)C_1}{r^2}. \tag{148}$$

Решение уравнения (148) имеет вид:

$$u(r) = D_1 r + \frac{D_2}{r} + D_3; \tag{149}$$

$$-D_3 = \alpha(1+\mu)C_1; \tag{150}$$

$$D_3 = -\alpha(1+\mu)C_1; \tag{151}$$

$$u(r) = D_1 r + \frac{D_2}{r} - \alpha(1-\mu)C_1. \tag{152}$$

Будем в качестве примера задачи в перемещениях рассматривать задачу выгорания упругого цилиндра, заключенного в жесткую обойму [3, 15-20]:

$$u(r = r_1) = u_1(t); \tag{153}$$

$$u(r = r_2) = 0; \tag{154}$$

$$D_1 r_1 + \frac{D_2}{r_1} - \alpha(1+\mu)C_1 = u_1(t); \tag{155}$$

$$D_1 r_2 + \frac{D_2}{r_2} - \alpha(1+\mu)C_1 = 0; \tag{156}$$

$$D_1(r_1 - r_2) + D_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = u_1(t); \tag{157}$$

$$D_1 = \frac{u_1(t)}{r_1} - \frac{D_2}{r_1^2} + \frac{\alpha(1+\mu)C_1}{r_1}; \tag{158}$$

$$\frac{r_2}{r_1}u_1(t) - \frac{r_2}{r_1^2}D_2 + \frac{\alpha(1+\mu)C_1}{r_1} + D_2\frac{(r_2 - r_1)}{r_1 r_2} - \alpha(1+\mu)C_1 = 0; \tag{159}$$

$$\frac{D_2}{r_1}\left[\frac{(r_2 - r_1)}{r_2} - \frac{r_2}{r_1}\right] = \alpha(1+\mu)C_1 - \alpha(1+\mu)C_1\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_2}{r_1}u_1(t); \tag{160}$$

$$\frac{D_2}{r_1}\frac{[-r_1 r_2 - r_1^2 - r_2^2]}{r_1 r_2} = \alpha(1+\mu)C_1\left[1 - \frac{r_2}{r_1}\right] - \frac{r_2}{r_1}u_1(t); \tag{161}$$

$$\frac{D_2}{r_1}\frac{[r_1 r_2 - r_1^2 - r_2^2]}{r_1 r_2} = \frac{\alpha(1+\mu)C_1}{r_1}(r_1 - r_2) - \frac{r_2}{r_1}u_1(t); \tag{162}$$

$$D_2\frac{(r_1 r_2 - r_1^2 - r_2^2)}{r_1 r_2} = \alpha(1+\mu)(r_1 - r_2)C_1 - r_2 u_1(t); \tag{163}$$

$$D_2 = \frac{r_1 r_2[\alpha(1+\mu)(r_1 - r_2)C_1 - r_2 u_1(t)]}{[r_1 r_2 - r_1^2 - r_2^2]}; \tag{164}$$

$$D_1 = \frac{u_1(t)}{r_1} + \frac{\alpha(1+\mu)C_1}{r_1} - \frac{D_2}{r_1^2}. \tag{165}$$

Таким образом, в соответствии с формулами (152), (164) и (165) мы можем сделать вывод о том, что при решении данной задачи в перемещениях, радиальное перемещение $u(r)$ и деформации ε_θ и ε_r не зависят от теплофизической константы C_2, что нежелательно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Варданян, Г. С. Сопротивление материалов / Г. С. Варданын, В. И.

Андреев, Н. М. Атаров, А. А. Горшков. – М., 1995. – 568 с.

2 Аксенов, А. А. Расчет напряженно-деформированного состояния изотропного упругого цилиндра при стационарном тепловом воздействии / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2017. – Т. 1. – № 1 (19). – С. 39-47.

3 Колтунов, М. А. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов / М. А. Колтунов, В. П. Майборода, В. Г. Зубчаников. – М. : «Машиностроение», 1983. – 239 с.

4 Горшков, А. Г. Сопротивление материалов : учеб. пособ. / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – 2-е издание испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.

5 Аксенов, А. А. Расчет напряженно-деформированного состояния упругого цилиндра из несжимаемого материала в условиях теплового воздействия / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2016. – Т. 4. – № 4 (18). – С. 35-40.

6 Кучерявый, В. И. Теория упругости : учеб. пособие / В. И. Кучерявый. – Ухта : УГТУ, 2011. – 126 с.

7 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов : учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – 10-е издание, перераб. и доп. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.

8 Аксенов, А. А. Расчет напряженно-деформированного состояния ортотропного упругого цилиндра / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2017. – Т. 4. – № 4 (22). – С. 73-77.

9 Огарков, В. Б. Обобщенная плоская деформация равномерно-вращающегося изотропного упругого вала из несжимаемого материала / В. Б. Огарков, А. А. Аксенов, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2018. – Т. 1. – № 1 (23). – С. 68-74.

10 Krotov, V. Application of the method of the principal components for the analysis of bearing ability of the wheel pair of the car : V. Krotov, S. Krotov // Transport Problems. – 2009. – Vol. 4. – № 4. pp. 15-23.

11 Shlyannikov, V. N. Method for assessment of the residual life of turbine disks : V. N. Shlyannikov, R. R. Yarullin // Inorganic Materials. – 2010. Vol. 46. – № 15. – pp. 1683-1687.

12 Водопьянов, В. И. Курс сопротивления материалов с примерами и задачами : учеб. пособие / В. И. Водопьянов, А. Н. Савкин, О. В. Кондратьев ;

ВолгГТУ. – Волгоград, 2012. – 136 с.

13 Benabou, L. Predictions of compressive strength and kink band orientation for wood species : L. Benabou // Mechanics of materials. – 2008. – Т. 42. – Вып. 3. – С. 335-343. – DOI : 10.1016/j.mechmat.2009.11.015.

14 Аксенов, А. А. Расчет температурного поля прессованной древесины при интенсивном нагреве ее изнутри / А. А. Аксенов, С. В. Малюков, В. С. Тюхин // Воронежский научно-технический Вестник. – 2017. – Т. 2. – № 2 (20). – С. 4-15.

15 Aydemir, D. The Lap Joint Shear Strength of Wood Materials Bonded by Cellulose Fiber-Reinforced Polyvinyl Acetate : D.Aydemir // Bioresources. – 2014. – Т. 9. – Вып. 1. – С. 1179-1188.

16 Аксенов, А. А. Способ расчета на прочность упругой балки из древесного материала / А. А. Аксенов, В. Б. Огарков, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический Вестник. – 2016. – Т. 3. – № 3 (17). – С. 53-56.

17 Chida, Tomohiro A Proposed Standard Test Method for Shear Failure and Estimation of Shear Strength of Japanese Cedar I. Shear failure test of Japanese cedar laminates using wood material as stiffener and finite element analysis, and estimation of shear modulus : T. Chida, T. Sasaki, H. Yamauchi, Y. Okazaki, Y. Kawai, Y. Iijima, // Mokuzai gakkaishi. – 2012. – Т. 58. – Вып. 5. – С. 260-270. – DOI : 10.2488/jwrs.58.260.

18 Burgert, I. The tensile strength of isolated wood rays of beech (Fagus sylvatica L.) and its significance for the biomechanics of living trees : I. Burgert, D. Eckstein // Trees-structure and function. – 2001. – Т. 15. – Вып. 3. – С. 168-170. – DOI : 10.1007/s00468000008.

19 De Magistris, F Deformation of wet wood under combined shear and compression : F. De Magistris, L. Salmen // Wood science and technology. – 2005. – Т. 39. – Вып. 6. – С. 460-471. – DOI : 10.1007/s00226-005-0025-x.

20 Galicki, J. A new approach to formulate the general strength theories for anisotropic discontinuous materials. Part A : The experimental base for a new approach to formulate the general strength theories for anisotropic materials on the basis of wood : J. Galicki, M. Czech // Applied mathematical modeling. – 2013. – Т. 37. – Вып. 3. – С. 815-827. – DOI : 10.1016/j.apm.2012.03.004.